$\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式とその応用

中村 信裕 (東京大学)*

概　要

Seiberg-Witten 方程式のある変種, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式を導入し, それを用いることで4次元多様体の局所係数交叉形式に対する制約が得られることについて解説する. 得られる制約は2種類あり, 一つ目の制約は定値な局所係数交叉形式に関する Froyshov の定理のアナロジーである. もう一つは古田幹雄氏による10/8不等式の局所係数版である. これらの応用として, Rohlin の定理と10/8不等式を破らない nonsmoothable なスピン多様体を構成できる.

1. 序

ゲージ理論の4次元トポロジーへの応用は, 1980年代初頭に, 定値 (定符号) 交叉形式に関するDonaldsonの定理[3]によって華々しくその幕を上げた. それは, 滑らかな閉4次元多様体の交叉形式が定値であるなら標準的なもの (すなわち対角形式) に限るという鮮やかな定理であった. 証明にはSU(2) インスタントンのモジュライ空間が使われ, コンパクトでないこの空間の end の解析と, ゲージ変換群の作用の商特異点である可約な解の存在が重要なポイントであった.

Donaldsonの定理は, 程なく, Fintushel-Stern[6] によって, 構造群がより小さいSO(3) インスタントンのモジュライ空間を用いても証明できることが知られた. 彼らの証明においても, 可約な解 (この場合U(1) 特異点であるもの) の存在が重要なポイントであった.

最近, K. Froyshov[7] はDonaldsonの定理のある局所係数版を証明した. すなわち, 滑らかな閉4次元多様体の**局所係数**交叉形式が定値であるなら標準的なものに限るという形の定理である. (Froyshov はより一般に境界のある状況で彼の結果を定式化している.) そこではSO(3) インスタントンのモジュライ空間が用いられるが, Fintushel-Stern[6] のときとは別の種類の可約解 ($\mathbb{Z}/2$ 特異点であるもの) が効果的に使われている.

また, Donaldsonの定理は, “もう一つのゲージ理論”, Seiberg-Witten 理論でも示すことができた ([13, 17] 参照). このことは, Donaldson 理論とSeiberg-Witten 理論の「等価性」を示唆する現象のひとつであった.

本稿では, 上述の Froyshov の定理の類似物をSeiberg-Witten 理論によって示すことができることを解説する. (文献は[15].) より正確には, 通常のSeiberg-Witten 方程式が直接用いられるわけでなく, そのある変種, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式が導入され用いられる.

2010 Mathematics Subject Classification: 57R57
キーワード：4次元多様体, 交叉形式, モノポール方程式

* 〒153-8914　東京都目黒区駒場3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: nobuhiro@ms.u-tokyo.ac.jp
web: http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~nobuhiro/

主結果を述べるために, いくつかのものを準備しよう. X を滑らかな連結有向閉4次元多様体とする. X の二重被覆 $\tilde{X}$ が与えられたとし, $l = \tilde{X} \times_{\{\pm 1\}} \mathbb{Z}$ を, ファイバーが $\mathbb{Z}$ である同伴束とする. すると l を係数束とする局所係数コホモロジー $H^*(X;l)$ を考えることができる. 係数束として $l \otimes l = \mathbb{Z}$ であるので, 次の形のカップ積が考えられる:

$$H^2(X;l) \otimes H^2(X;l) \to H^4(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

これは $H^2(X;l)/\mathrm{torsion}$ 上のユニモジュラーな二次形式 $Q_{X,l}$ を誘導する. $b_q(X;l)$ を l 係数の q 次ベッチ数とする. すなわち $b_q(X;l) = \mathrm{rank}\, H^q(X;l)/\mathrm{torsion}$. 通常の $\mathbb{Z}$ 係数のベッチ数は $b_q(X)$ と書く. また, 係数束の短完全列,

$$0 \to l \xrightarrow{\cdot 2} l \to \mathbb{Z}/2 \to 0,$$

が次の長完全列を誘導することに注意する.

$$\cdots \to H^q(X;l) \xrightarrow{\cdot 2} H^q(X;l) \to H^q(X;\mathbb{Z}/2) \to H^{q+1}(X;l) \to \cdots.$$

特に, mod 2 reduction, $H^2(X;l) \to H^2(X;\mathbb{Z}/2)$ が定義されている.

さて, 次が主結果である:

定理 1.1 ([15]). *X を滑らかな連結有向閉4次元多様体とする. $l \to X$ を X 上の非自明な $\mathbb{Z}$ 束とし, 次を満たしていると仮定する.*

(1) *l 係数交叉形式 $Q_{X,l}$ は定値である.*

(2) *$\lambda = l \otimes \mathbb{R}$ としたとき, $w_1(\lambda)^2$ は $H^2(X;l)$ のトーションに持ち上がる.*

このとき $Q_{X,l}$ は対角形式と同型である.

注意 1.2. 前述の Froyshov[7] の定理は一般に境界付き多様体に対する結果であるのだが, 系として閉多様体の場合には次のことが分かる：「滑らかな連結有向閉4次元多様体 X が $b_+(X) + \dim_{\mathbb{Z}/2} \mathrm{torsion}(H_1(X;\mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Z}/2 \leq 2$ を満たすとする. $l \to X$ を X 上の非自明な $\mathbb{Z}$ 束としたとき, l 係数交叉形式 $Q_{X,l}$ が定値であるならば, $Q_{X,l}$ は対角形式と同型である.」これを定理 1.1 と比較してみてほしい.

定理 1.1 の証明には前述の $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式を用いるのであるが, Donaldson の定理の Seiberg-Witten 方程式を使った証明と平行である. ほとんど方程式を取り換えるだけで自然に示せると言ってよい.

Seiberg-Witten 方程式は4次元多様体の Spin^c 構造の上に定義される方程式であった. 古田幹雄氏[9]によって Spin^c 構造のある拡張 (あるいは $\mathrm{Pin}^-(2)$ 版と言うべきもの) である Spin^{c-}-構造が定式化された. $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式は, 一言で言うならば, Spin^{c-}-構造上に自然に考えられる Seiberg-Witten 方程式の $\mathrm{Pin}^-(2)$ 版である.

$\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式の解のモジュライ空間は, Seiberg-Witten のモジュライ空間と同様に, コンパクトであることがわかった. すると, 古田幹雄氏の有限次

元近似を用いる議論を真似ることにより, 古田氏のいわゆる10/8不等式 [8] の局所係数版が得られる.

定理 1.3 ([15]). X を滑らかな連結有向閉4次元多様体とする. X 上の $\mathbb{Z}$ 束 l で $w_1(\lambda)^2 = w_2(X)$ を満たすものに対して, 次の不等式が成り立つ.

$$b_+(X;l) \geq -\frac{\mathrm{sign}(X)}{8}.$$

定理 1.1 や定理 1.3 の応用として, 滑らかな多様体に対して既に知られている制限を破らない nonsmoothable な多様体を構成することができる. スピンの場合を考えよう. 滑らかな4次元スピン多様体に対しては, Rohlin の定理と上述の古田氏の10/8不等式が基本的である. Rohlin の定理は4次元閉スピン多様体の符号数は必ず16の倍数であるというものだった. 一方, 古田氏の定理は, 交叉形式が不定値である4次元閉スピン多様体 X は必ず不等式

$$b_2(X) \geq \frac{5}{4}|\,\mathrm{sign}(X)| + 2, \tag{1.4}$$

を満たすというものであった. 古田氏の定理は $b_1(X) \geq 1$ の場合に古田氏と亀谷幸生氏 [10] によって精密化がされており, (1.4) より強い不等式が成立することがあることが示されている. この精密化された不等式を**強い**10/8不等式と呼ぶことにする.

定理 1.5 ([15]). nonsmoothable なスピン閉4次元多様体であって, 符号数が16で割り切れ, 強い10/8不等式を満たすものが存在する.

定理 1.5 の証明は難しくない. M を T^4 あるいは $T^2 \times S^2$ とすると, M 上の任意の非自明な $\mathbb{Z}$ 束 $l' \to M$ に対して $b_2(M;l) = 0$, $w_1(l' \otimes \mathbb{R})^2 = 0$ が成り立つことに注意する. また V を単連結な4次元位相多様体で, その交叉形式 Q_V が even で定値であり, $\mathrm{sign}(V)$ が16の倍数であるものとする. 十分大きな整数 k をとり, $X = V\#kM$ が強い10/8不等式を満たすようにする. $l = \underline{\mathbb{Z}}\#kl'$ とすると, $Q_{X,l} = Q_V$, $w_1(l \otimes \mathbb{R})^2 = 0$ となる. もし X が滑らかであったとすると定理 1.1 により $Q_{X,l} = Q_V$ は対角形式でなければならないが, これは矛盾である.

ここでは定理 1.1 を使い構成したが, 定理 1.3 を用いても同様の例を構成できる. また, スピンでない nonsmoothable な多様体も構成することができる.

以下, 本稿の構成は以下のとおりである. §2 で Spin^{c-}-構造と $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式について解説し, §3 で定理 1.1 の証明のあらましを述べる. §4 では今後の展望として, いくつか期待される予想や今後考えるべき問題について述べる. 定理 1.3 の証明については紙数の関係から割愛した. 解説 [16] あるいは原論文 [15] を参照されたい.

2. Spin^{c-}-構造と $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式

2.1. 群 $\mathrm{Spin}^{c-}(n)$

$\mathrm{Pin}^-(2)$ を, 四元数の単元たちのなす群 $\mathrm{Sp}(1)$ の中で, $\mathrm{U}(1)$ と j とのよって生成される部分群とする. すなわち $\mathrm{Pin}^-(2) = \mathrm{U}(1) \cup j\,\mathrm{U}(1) \subset \mathrm{Sp}(1) \subset \mathbb{H}$ であ

る．すると 2 対 1 の準同型写像 φ_0: $\mathrm{Pin}^-(2) \to \mathrm{O}(2)$ で, $z \in \mathrm{U}(1) \subset \mathrm{Pin}^-(2)$ を $z^2 \in \mathrm{U}(1) \subset \mathrm{O}(2)$ に写し, j を鏡映

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

に写すものがある．

次の定義をおく: $\mathrm{Spin}^{c-}(n) = \mathrm{Spin}(n) \times_{\{\pm 1\}} \mathrm{Pin}^-(2)$.

すると次の完全列が得られる．

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathrm{Spin}^{c-}(n) \to \mathrm{SO}(n) \times \mathrm{O}(2) \to 1.$$

2.2. Spin^{c-}-構造

上の $\mathrm{Spin}^{c-}(n)$ を用い Spin^c 構造の定義を真似て Spin^{c-}-構造を以下のように定義する．X を滑らかな n 次元有向多様体としよう．X 上にリーマン計量を一つ固定し, $F(X)$ を $\mathrm{SO}(n)$ 接枠束とする．また X 上に主 $\mathrm{O}(2)$ 束 E が与えられたと仮定する．

定義 2.1. (X, E) 上の Spin^{c-}-構造とは, 主 $\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{O}(2)$ 束 $F(X) \times_X E$ のある主 $\mathrm{Spin}^{c-}(n)$ 束への持ち上げである．これは次のデータ (P, τ) によって与えられる：主 $\mathrm{Spin}^{c-}(n)$ 束 P, そして束の同型写像 τ: $P/\{\pm 1\} \to F(X) \times_X E$.

次は基本的な命題である．

命題 2.2 ([9])**.** (X, E) 上に Spin^{c-}-構造が存在することの必要十分条件は $w_2(TX) = w_2(E) + w_1(E)^2$ である．

$\lambda = \det E$ とすると $w_1(E) = w_1(\lambda)$ である．以下では, $\mathrm{O}(2)$ 束 E として, 局所系 l と次のように関係するものを考える．

$$\lambda = \det E = l \otimes \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

E が (2.3) を満たしているとき, l 係数で考えた E のオイラー類を $\tilde{c}_1(E) \in H^2(X; l)$ とする．Froyshov[7] はこれを twisted 1st Chern class と呼んでおり, 次のことを観察している．

命題 2.4 ([7])**.** $\det E \cong \lambda$ であるような $\mathrm{O}(2)$ 束 E の同型類は $\tilde{c}_1(E) \in H^2(X; l)$ で分類される．また $\tilde{c}_1(E)$ の $H^2(X; \mathbb{Z}/2)$ への mod 2 reduction は $w_2(E)$ である．

以下, $n = 4$ に話を限定する．まず $\mathrm{Spin}^{c-}(4) = (\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)) \times_{\{\pm 1\}} \mathrm{Pin}(2)$ である．Spin^{c-}-構造上にクリフォード積, そしてディラック作用素を定義するために, $\mathrm{Spin}^{c-}(4)$ 加群 $\mathbb{H}_T$, $\mathbb{H}_+$, $\mathbb{H}_-$ を導入する．これらはベクトル空間としては四元数のなす空間 $\mathbb{H}$ に同型だが, $[q_+, q_-, u] \in \mathrm{Spin}^{c-}(4) = (\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)) \times_{\{\pm 1\}} \mathrm{Pin}(2)$ の作用が次のように与えられる:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_T \ni v &\mapsto q_+ v q_-^{-1}, \\ \mathbb{H}_\pm \ni \phi &\mapsto q_\pm \phi u^{-1}. \end{aligned}$$

ここで v, $q_\pm$, u, ϕ の積は四元数の積である．すると, 同伴束 $P \times_{\mathrm{Spin}^{c-}(4)} \mathbb{H}_T$ は接枠束 $F(X)$ に同型である．また, Spin^{c-}-構造の正負のスピノル束 S^+, S^- が $S^\pm = P \times_{\mathrm{Spin}^{c-}(4)} \mathbb{H}_\pm$ で定義される．

2.3. クリフォード積とディラック作用素

クリフォード積 $\rho\colon \Omega^1(X) \times \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-)$ が次の $\mathrm{Spin}^{c-}(4)$ 同変写像から誘導される: $\rho\colon \mathbb{H}_T \times \mathbb{H}_+ \to \mathbb{H}_-$, $(v, \phi) \mapsto \bar{v}\phi$. 後々の構成のためには, この ρ の "ねじれた複素化" が必要になる．まず $\mathrm{Spin}^{c-}(4)$ は二つの成分を持ち, 単位元成分 G_0 は $\mathrm{Spin}^c(4)$ に同型なことに注意する．$\varepsilon\colon \mathrm{Spin}^{c-}(4) \to \mathrm{Spin}^{c-}(4)/G_0 \cong \{\pm 1\}$ を射影とすると, 同伴束 $P \times_\varepsilon \mathbb{R}$ は $\lambda = \det E$ と同型となる．さて, $\mathbb{C}$ に $\mathrm{Spin}^{c-}(4)$ を ε を通じて複素共役で作用させよう．$\mathrm{Spin}^{c-}(4)$ 同変写像 $\rho\colon \mathbb{H}_T \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \times \mathbb{H}_+ \to \mathbb{H}_-$ を $(v \otimes a, \phi) \mapsto \bar{v}\phi\bar{a}$ で定義すると次のようなクリフォード積(の "ねじれた複素化") が誘導される．

$$\rho\colon \Omega^1(\mathbb{R} \oplus i\lambda) \times \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-).$$

$O(2)$ 束 E 上に $O(2)$ 接続 A が与えられたとすると, これとリーマン計量から定まるレヴィ・チビタ接続から, $\mathrm{Spin}^{c-}(4)$ 束 P 上に $\mathrm{Spin}^{c-}(4)$ 接続 $\mathbb{A}$ が誘導される．この接続 $\mathbb{A}$ と上記のクリフォード積を用いてディラック作用素

$$D_A\colon \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-),$$

が定義される．A' を別の $O(2)$ 接続とすると, $a = A - A'$ は $\Omega^1(i\lambda)$ の要素であり, これらのディラック作用素には次の関係がある: $D_{A+a}\phi = D_A\phi + \frac{1}{2}\rho(a)\phi$.

2.4. $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式

$\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式を定義するためには, もう一つ, 次のような二次写像が必要である．$x = [q_+, q_-, u] \in \mathrm{Spin}^{c-}(4)$ を四元数の虚部 $\operatorname{im}\mathbb{H}$ に $\operatorname{im}\mathbb{H} \ni v \mapsto \varepsilon(x) q_+ v q_-^{-1}$ で作用させると, この作用による P の同伴束について $\Gamma(P \times_{\mathrm{Spin}^{c-}(4)} \operatorname{im}\mathbb{H}) \cong \Omega^+(i\lambda)$ である．すると, 対応 $\phi \in \mathbb{H}_+ \mapsto \phi i \bar{\phi} \in \operatorname{im}\mathbb{H}$ は $\mathrm{Spin}^{c-}(4)$ 同変となるので, 次の写像が誘導される：

$$q\colon \Gamma(S^+) \to \Omega^+(i\lambda).$$

$\mathcal{A}$ を $O(2)$ 束 E 上の $O(2)$ 接続全体のなす空間とする．すると $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式は, $(A, \phi) \in \mathcal{A} \times \Gamma(S^+)$ に対し, 次で定義される方程式である．

$$\begin{cases} D_A\phi = 0, \\ F_A^+ = q(\phi). \end{cases} \tag{2.5}$$

2.5. Seiberg-Witten 方程式との関係

先に進む前に, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式は X の二重被覆上の Seiberg-Witten 方程式と関係することについて説明したい．(P, τ) を (X, E) 上の Spin^{c-} 構造とすると, P を $\mathrm{Spin}^{c-}(4)$ の単位元成分 G_0 で割った空間 $\tilde{X} := P/G_0$ は X の二重被覆

を与え, $\tilde{X} \times_{\{\pm 1\}} \mathbb{R} \cong \det E$ という関係がある. また G_0 は $\mathrm{Spin}^c(4)$ に同型であった. すると P は $\tilde{X}$ 上の $G_0 = \mathrm{Spin}^c(4)$ 束と思うことができ, これは $\tilde{X}$ 上の Spin^c 構造を定めることがわかる.

$J := [1, 1, j] \in (\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Pin}^-(2))/\{\pm 1\} = \mathrm{Spin}^{c-}(4)$ の P への作用を考えると, これは $\tilde{X}$ の被覆変換 $\iota\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ を被覆している. J 作用は P のバンドル同型を与えるわけではないが, $\tilde{X}$ に誘導された Spin^c 構造のスピノル束と determinant line bundle 上には**反線型**な対合 I を誘導することが示せる.

すると, 標語的に言って, X 上の $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール理論は $\tilde{X}$ 上の Seiberg-Witten 理論の I 不変部分に等しいことがわかる. 実際, X 上の $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポールのモジュライ空間は, $\tilde{X}$ 上の Seiberg-Witten モジュライの I 不変部分と同一視することができる. したがって, I は Seiberg-Witten 理論上のある種の**実構造**と思うことができ, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール理論は**実の** Seiberg-Witten 理論と見ることができる.

注意 2.6. Tian-Wang[20] はケーラー多様体が実構造を持つ場合に**実の** Seiberg-Witten 不変量を定義し考察している. 彼らの定式化は我々のものと良く似ているが, Spin^c 構造の上の対合 I として, ケーラー多様体の実構造を組み合わせたものを用いている点が異なる.

2.6. ゲージ変換群

$\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール理論のゲージ変換群は次で与えられる：

$$\mathcal{G} = \Gamma(\tilde{X} \times_{\{\pm 1\}} \mathrm{U}(1)).$$

ここで $\{\pm 1\}$ の $\mathrm{U}(1)$ への作用は複素共役によって与えられる.

$g \in \mathcal{G}$ の $(A, \phi) \in \mathcal{A} \times \Gamma(S^+)$ への作用は, $g(A, \phi) = (A - 2g^{-1}dg, g\phi)$ で与えられ, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポールのモジュライ空間 $\mathcal{M}$ は $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式の解の $\mathcal{G}$ 同値類全体のなす空間として定義される.

注意 2.7. Seiberg-Witten 理論におけるゲージ変換群は $\mathcal{G}_{SW} = \mathrm{Map}(\tilde{X}, \mathrm{U}(1))$ であった. ι を $\tilde{X}$ の被覆変換として, $\mathcal{G}_{SW}$ の上に対合 I を $\mathcal{G}_{SW} \ni u \mapsto \overline{\iota^* u}$ で定義すると, $\mathcal{G}_0 \cong (\mathcal{G}_{SW})^I$ が成り立つ. ここで $\bar{\cdot}$ は複素共役を表す.

$\tilde{c}_1(E) = 0$ のとき $E \cong \underline{\mathbb{R}} \oplus \lambda$ となるが, このような $\mathrm{O}(2)$ 束 E を持つ Spin^{c-} 構造は $\mathrm{Spin}^{c-}(4)$ 束 P が $\mathrm{Spin}(4) \times_{\{\pm 1\}} \{\pm 1, \pm j\}$ 束に還元することがわかる. これに伴いこの場合はゲージ対称性が大きくなりゲージ変換群は

$$\mathcal{G}' = \Gamma(\tilde{X} \times_{\{\pm 1\}} \mathrm{Pin}^-(2))$$

となる. ここで $\{\pm 1\}$ の $\mathrm{Pin}^-(2) = \mathrm{U}(1) \cup j\,\mathrm{U}(1)$ への作用は, $\mathrm{U}(1)$ へは複素共役で, j には自明な作用として与えられる.

注意 2.8. 定理 1.3 の証明では大きな対称性 $\mathcal{G}'$ を持つことがキーポイントである.

2.7. モジュライ空間

$\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポールのモジュライ空間を次のように次のように定義する.

$$\mathcal{M} = \{\ (2.5)\ \text{の解}\ \}/\mathcal{G}.$$

Seiberg-Witten 方程式のときと同様にして $\mathcal{M}$ はコンパクトであることを示すことができ, その仮想次元 d は次で与えられる.

$$d = \frac{1}{4}(\tilde{c}_1(E)^2 - \mathrm{sign}(X)) - (b_0(X;l) - b_1(X;l) + b_+(X;l)). \tag{2.9}$$

2.8. 可約解

$x = (A, \phi) \in \mathcal{A} \times \Gamma(S^+)$ について, ϕ が 0 切断でないとき $\mathcal{G}$ 作用は自由である. $\mathcal{G}$ 作用が自由でないとき, すなわち x が $(A, 0)$ の形のとき可約であるという. $(A, 0)$ の固定部分群は, $\{\pm 1\} \subset \mathcal{G} = \Gamma(\tilde{X} \times_{\{\pm 1\}} \mathrm{U}(1))$(定数切断) である. $E = \mathbb{R} \oplus \lambda$ の時はゲージ対称性が $\mathcal{G}'$ に大きくなるが, このとき A が平坦であれば固定部分群は定数切断 $j \in \mathcal{G}'$ で生成される $\mathbb{Z}/4$ になる. $\mathcal{M}$ の中で, 可約な解の $\mathcal{G}$ 同値類は (もし可約解が存在すれば)$b_1(X;l)$ 次元のトーラス $T^{b_1(X;l)}$ を形成する.

3. 定理 1.1 の証明のあらまし

定理 1.1 の証明の方針は, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポールのモジュライ空間を用いて, 局所係数交叉形式 $Q_{X,l}$ の特性元に対してある不等式を示し, 次の Elkies の定理に持ち込むというものである.

定理 3.1 (Elkies[4]). $L \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{Z}$ 上のユニモジュラーな格子とする. L の全ての特性元 w が不等式 $|w^2| \geq n = \mathrm{rank}\, L$ を満たすなら, $L \cong \mathbb{Z}^n$ である.

注意 3.2. $w \in L$ が特性元であるとは, 任意の $v \in L$ に対して $v \cdot v \equiv v \cdot w \mod 2$ が成り立つことであった.

以下, 簡単のため $b_1(X;l) = 0$ を仮定する. 定理 1.1 の仮定のもとでは, X 上の Spin^{c-}-構造に対し, $\tilde{c}_1(E)$ が $Q_{X,l}$ の特性元を与えることがわかる. (これは $\tilde{c}_1(E)$ の mod 2 reduction が $w_2(E)$ であることと, 命題 2.2 からわかる.) $b_+(X;l) = 0$ のとき (すなわち $Q_{X,l}$ が負定値のとき), $Q_{X,l}$ の特性元 $\tilde{c}_1(E)$ に対し, 不等式 $|w^2| \geq n$ に相当するのは $|\tilde{c}_1(E)^2| \geq b_2(X;l)$ であり, 後述のようにこれは $\dim \mathcal{M} \leq 0$ と同値であることがわかる. さらに, 以下で見るように, 全ての X 上の Spin^{c-}-構造に対し $\dim \mathcal{M} \leq 0$ を示すことができる. 最後に X 上の Spin^{c-}-構造を動かすことで全ての $Q_{X,l}$ の特性元に対し目的の不等式を示すことができる.

3.1. $b_+(X;l) = 0$ のときの $\mathcal{M}$ の構造

不等式 $d = \dim \mathcal{M} \leq 0$ を示すために $\mathcal{M}$ の構造を調べる. $b_+(X;l) = 0$ かつ $b_1(X;l) = 0$ のとき, $\mathcal{M}$ 内で可約解のゲージ同値類が唯一つ存在する. これを ρ_0 とする. $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式を (Seiberg-Witten 方程式のときと同様のやり方で) 摂動することにより, $\mathcal{M} \setminus \{\rho_0\}$ は d 次元の多様体となる. また ρ_0 は $\mathcal{M}$ 内で

$\mathbb{Z}/2$ 特異点となり, ρ_0 の小さな近傍 $N(\rho_0)$ を取ると, それは $\mathbb{RP}^{d-1}$ の錐の形をしていることがわかる. したがって, $\overline{\mathcal{M}}$ を $\mathcal{M}\setminus N(\rho_0)$ の閉包とすると, それは境界が $\mathbb{RP}^{d-1}$ のコンパクト d 次元多様体である.

さて, $\mathcal{B}^* = (\mathcal{A}\times(\Gamma(S^+)\setminus\{0\}))$ とおく. すると $\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}\setminus N(\rho_0)} \subset \mathcal{B}^*$ である. このとき次がわかる.

命題 3.3. $\mathcal{B}^*$ は $\mathbb{RP}^\infty \times T^{b_1(X;l)}$ とホモトピー同値である.

Seiberg-Witten のときには $\mathcal{B}^*_{SW}$ は $\mathbb{CP}^\infty \times T^{b_1(X)}$ とホモトピー同値であった. 命題 3.3 の heuristic な説明は $\mathcal{B}^* \cong (\mathcal{B}^*_{SW})^I$ である.

命題 3.3 を用いて次を示そう

補題 3.4. $b_+(X;l)=0$ かつ $b_1(X;l)=0$ のとき $d=\dim\mathcal{M}\le 0$.

証明. $d>0$ を仮定する. $\overline{\mathcal{M}}$ は $\partial\overline{\mathcal{M}}=\mathbb{RP}^{d-1}$ であるコンパクト d 次元多様体であった. 一方, コホモロジー類 $C\in H^{d-1}(\mathcal{B}^*;\mathbb{Z}/2)\cong H^{d-1}(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}/2)$ で $\langle C,[\partial\overline{\mathcal{M}}]\rangle \neq 0$ となるものがあることがわかるので, これは矛盾である. □

さて, 任意の $\mathbb{Z}$ 束に対し $\mathrm{sign}(X) = b^+(X;l) - b^-(X;l)$ であることに注意し, (2.9) を見ると, $b_+(X;l)=0$ かつ $b_1(X;l)=0$ のとき $d\le 0$ は次と同値である.

$$b_2(X;l) \le |\tilde{c}_1(E)^2|.$$

これが示すべき不等式であった.

4. 今後の展望

これまで $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式とその交叉形式への応用について解説してきたが, この節ではその後の研究の進行状況や期待される予想, 今後考えるべき問題について述べたい. 現時点で (2011 年 7 月末現在), 本節に書かれた事柄で完全に確立されたものは ($\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量がきちんと定義されることを除いて) 無いと言ってよいが, ほぼ間違いなく成立すると思われるが細かいチェックが済んでいない事柄を「定理」「命題」等, 括弧付きで記すことにする. 講演の日までにこれらを本当の定理や命題として紹介できるようにしたいと考えている.

4.1. $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量

Seiberg-Witten 不変量と全く同様にして, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量を定義することができる. Seiberg-Witten 不変量は整数値の不変量だったが, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量は多くの場合 $\mathbb{Z}/2$ に値を取る不変量になる. (モジュライの次元が 0 で向き付け可能な場合のみ整数値の不変量が定義できる.) 4 次元多様体 X とその上の Spin^{c-}-構造 c に対して, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量を

$$\mathrm{SW}^{\mathrm{Pin}}(X,c)$$

と書くことにする. Spin^{c-}-構造 c が与えられると X の二重被覆 $\tilde{X}$ とその上の Spin^c 構造 $\tilde{c}$ が定まった. (§2.5 参照) $(\tilde{X},\tilde{c})$ に対する通常の Seiberg-Witten 不変量

を $\mathrm{SW}(\tilde{X},\tilde{c})$ と書くことにすると, $\mathrm{SW}^{\mathrm{Pin}}(X,c)$ と $\mathrm{SW}(\tilde{X},\tilde{c})$ は次のような関係式で結ばれることが期待される.

「定理」 4.1.

$$\mathrm{SW}(\tilde{X},\tilde{c}) = \sum_{c} \mathrm{SW}^{\mathrm{Pin}}(X,c) \qquad \mathrm{mod}\ 2.$$

但し, c は $\tilde{c}$ に持ち上がるような Spin^{c-} 構造を動く.

0 でない $\mathrm{Pin}^{-}(2)$ モノポール不変量をもつ例として Enriques 曲面 E が考えられる. E の普遍被覆を $K \to E$ とすると, これは二重被覆であり K は $K3$ 曲面である. この二重被覆 $K \to E$ に同伴する $\mathbb{Z}$ 束を l としよう. また $\lambda = l \otimes \mathbb{R}$ としよう. c_0 を, 同伴する $\mathrm{O}(2)$ 束が $\underline{\mathbb{R}} \oplus \lambda$ であるような Spin^{c-}-構造とする. すると c_0 から誘導される $K3$ 曲面 K 上の Spin^{c} 構造 $\tilde{c}_0$ は K の複素構造から決まる標準的な Spin^{c} 構造 $\tilde{c}_0$ であることがわかる. さて $\mathrm{SW}(K,\tilde{c}_0) = \pm 1$ であった. 次が成り立つと考えられる.

「命題」 4.2.

$$\mathrm{SW}^{\mathrm{Pin}}(E,c_0) \neq 0 \in \mathbb{Z}/2$$

Seiberg-Witten 不変量の安定コホモトピー版である Bauer-Furuta 不変量 [2] の対応物を $\mathrm{Pin}^{-}(2)$ モノポールで定義することもできる. この $\mathrm{Pin}^{-}(2)$ モノポールの安定コホモトピー不変量を $\mathrm{BF}^{\mathrm{Pin}}(X,c)$ と書くことにする. さて二重被覆 $K\#K\#K \to E\#K$ を考えよう. 通常の Bauer-Furuta 不変量について

$$\mathrm{BF}(K\#K\#K, \tilde{c}_0\#\tilde{c}_0\#\tilde{c}_0) \neq 0$$

が知られている [1] . これに対応して次が成り立つと考えられる.

「命題」 4.3.

$$\mathrm{BF}^{\mathrm{Pin}}(E\#K, c_0\#\tilde{c}_0) \neq 0$$

これは比較的標準的な貼り合わせ公式である. 一方, 古田幹雄氏によって観察された次はこれより幾分非自明である.

「命題」 4.4 (古田幹雄氏による)**.**

$$\mathrm{BF}^{\mathrm{Pin}}(E\#E, c_0\#c_0) \neq 0$$

$E\#E$ の二重被覆 $\tilde{X}$ は二つの K を二箇所で連結和を取ったものになる. 別の言葉で言うと $\tilde{X}$ は $K\#K\#(S^1 \times S^3)$ と微分同相である. これに伴い $b_1(E\#E; l\#l) = 1$ となり, $\mathrm{Pin}^{-}(2)$ モノポール写像は S^1 上の族の間の写像となる. これは Seiberg-Witten では見られなかった $\mathrm{Pin}^{-}(2)$ モノポールの貼り合わせに特有な現象である.

4.2. 埋め込まれた曲面の種数の評価

Seiberg-Witten方程式の幾何的な応用の一つとしてThom予想の肯定的解決など4次元多様体に埋め込まれた曲面の種数の評価があった([11, 14, 18]). $\mathrm{Pin}^-(2)$モノポールを用いて同様の考察をすると, やはり同様の種数の評価ができると考えられる. Seiberg-Wittenでは埋め込まれた向き付けられた曲面の種数が評価できたわけだが, こちらの場合には埋め込まれた**向き付け不可能**な曲面の種数が評価できるものと思われる.

Xを閉4次元多様体とし, 非自明な$\mathbb{Z}$束$l \to X$が与えられたとしよう. するとl係数の2次のホモロジー類$\alpha \in H_2(X;l)$は, ある場合には次のような埋め込まれた曲面Σで実現されることがわかる：

- Σは連結で**向き付け不可能**な曲面でXに埋め込まれている. 埋め込み写像を $i\colon \Sigma \to X$ としよう.
- Σ の向きの局所系はlのiによる引き戻しi^*lと同一視できる.
- 誘導準同型を$i^*\colon H_2(\Sigma;i^*l) \to H_2(X;l)$とすると, $\alpha = i^*[\Sigma]$である. 但し, $[\Sigma]$は$H_2(\Sigma;i^*l)$に定まるΣの基本類を表す.

このような状況で, Σの種数$g(\Sigma)$について次が予想できる：

予想 4.5. EをX上の$\mathrm{O}(2)$束であって上のlに対し$\det E = l \otimes \mathbb{R}$が成り立つものとする. (X,E)上のSpin^{c-}-構造cについて$\mathrm{SW}^{\mathrm{Pin}}(X,c) \neq 0$または$\mathrm{BF}^{\mathrm{Pin}}(X,c) \neq 0$と仮定する. もし$\alpha \cdot \alpha \geq 0$ならば

$$g(\Sigma) - 1 \geq \tilde{c}_1(E) \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha.$$

4.3. シンプレクティック多様体

シンプレクティック多様体に対しては, Seiberg-Witten不変量とGromov-Witten不変量が等しいという著しい結果がTaubes[19]によって示されていた. これの$\mathrm{Pin}^-(2)$モノポール版は何であろうか？確定的なことは現時点ではわからないが, 一つの可能性は, 実構造をもつシンプレクティック多様体上のreal Gromov-Witten不変量との関係であろう. これはTian-Wang[20]によって提出された問のアナロジーである.

問題 4.6. 4次元閉シンプレクティック多様体(X,ω)に自由な対合$\iota\colon X \to X$があって$\iota^*\omega = -\omega$を満たすとしよう. このとき(X,ω,ι)のreal Gromov-Witten不変量と商多様体X/ιの$\mathrm{Pin}^-(2)$モノポール不変量は等しいか？

4.4. その他の問題

Seiberg-Witten不変量は当初からDonaldson不変量との等価性が予想され(Witten予想), Feehan-Lenessによってその証明が与えられた. (例えば[5]参照.) では$\mathrm{Pin}^-(2)$モノポール不変量に対してはどうだろうか.

問題 4.7. $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量に対応するインスタントン不変量は何か？

4次元多様体の $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式を1次元 reduction して3次元多様体上で考えることも可能である．3次元多様体の Seiberg-Witten 不変量は（Turaev）torsion 不変量と等しいことが示されていた [12].

問題 4.8. 3次元多様体の $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量は既存の位相不変量と関係するか？

Chern-Simon-Dirac 汎関数を $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポールのものに取り替えることで Floer ホモロジーを定義することも可能であろう．

問題 4.9. $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール Floer 理論を建設せよ．

これに関連して次の問が生じる．

問題 4.10. Heegaard Floer 理論の $\mathrm{Pin}^-(2)$ 版は何であろうか？

以上, いくつかの予想や問題を書き連ねてきたが, これらの他にも試みるべきことは沢山あるだろうと思う．実際, Seiberg-Witten 理論で実行されたことは全て $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポールで試みることが可能であろう．そのような事柄のなかには Seiberg-Witten のときとほとんど同じ議論で興味深い結果をもたらすものもあるかもしれない．このような $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポールの可能性に今後も期待したい．

参考文献

[1] S. Bauer, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. II*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 20–41.

[2] S. Bauer and M. Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 1–19.

[3] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 279–315.

[4] N. D. Elkies, *A characterization of the $\mathbb{Z}^n$ lattice*, Math. Res. Lett. **2** (1995), no. 3, 321–326.

[5] P. Feehan and T. Leness, *On Donaldson and Seiberg-Witten invariants*, Topology and geometry of manifolds (Athens, GA, 2001), 237–248, Proc. Sympos. Pure Math., 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[6] R. Fintushel and R. Stern, SO(3)-*connections and the topology of* 4-*manifolds*, J. Differential Geom. **20** (1984), no. 2, 523–539.

[7] K. A. Froyshov, 4-*manifolds and intersection forms with local coefficients*, preprint, arXiv:1004.0077.

[8] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291.

[9] 古田幹雄,「SPIN-C STRUCTURE の拡張」(インフォーマルなノート, 2008.11.25).

[10] M. Furuta and Y. Kametani, Equivariant maps between sphere bundles over tori and KO-degree, preprint, arXiv:math/0502511

[11] P. B. Kronheimer and T. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 797–808.

[12] G. Meng and C. H. Taubes, <u>SW</u> = *Milnor torsion*, Math. Res. Lett. **3** (1996), no. 5, 661674.

[13] J. D. Moore, Lectures on Seiberg-Witten invariants, Lecture Notes in Mathematics, 1629. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[14] J. W. Morgan, Z. Szabo and C. H. Taubes, *A product formula for the Seiberg-Witten invariants and the generalized Thom conjecture*, J. Differential Geom. **44** (1996), no. 4, 706788.

[15] N. Nakamura, $\mathrm{Pin}^-(2)$-*monopole equations and intersection forms with local coefficients of* 4-*manifolds*, preprint, arXiv:1009.3624.

[16] 中村信裕, 「$\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式と 4 次元多様体の局所係数交叉形式」, 日本数学会, 2011 年度年会, 特別講演アブストラクト.

[17] L. I. Nicolaescu, Notes on Seiberg-Witten theory, Graduate Studies in Mathematics, 28. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[18] P. Ozsvath and Z. Szabo, *The symplectic Thom conjecture*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 1, 93124.

[19] C. H. Taubes, Seiberg Witten and Gromov invariants for symplectic 4-manifolds, Edited by Richard Wentworth. First International Press Lecture Series, 2. International Press, Somerville, MA, 2000.

[20] G. Tian and S. Wang, *Orientability and real Seiberg-Witten invariants*, Internat. J. Math. **20** (2009), no. 5, 573–604.