Pin(2) 同変 Seiberg-Witten Floer K 理論と境界付き 4 次元スピン多様体の交叉形式

中村 信裕 (大阪医科大学)

2016 年 3 月 16 日

概 要

境界付き 4 次元スピン多様体の交叉形式に関する C. Manolescu の論文 [33] を解説する．ホモロジー 3 球面 Y に対し Seiberg-Witten Floer K 理論を用いて整数値のホモロジー・コボルディズム不変量 $\kappa(Y)$ が定義される．さらに, Y を境界に持つ 4 次元スピン多様体に対して, $\kappa(Y)$ を含む 10/8 型の不等式が示される．

目 次

1 Introduction

4 次元多様体がどのような交叉形式を持つかという問は 4 次元トポロジーにおける基本問題の一つである．滑らかな閉 4 次元多様体 X の場合, 有名な Donaldson の定理は, X が定値交叉形式を持つならばそれは対角でなければならないことを主張する [7, 8]．この定値交叉形式について

の結果は X が境界 Y を持つときに拡張されており, Y が整係数ホモロジー球面のとき, Froyshov [10, 11, 12] は, Y の不変量を定義し, この不変量を介して X の交叉形式に対する拘束条件を得ている.[1]

スピンの場合, 松本幸夫氏による 11/8 予想が依然最重要な予想である:

予想 1.1 ([37]). 滑らかな閉 4 次元スピン多様体 X は

$$b_2(X) \geq \frac{11}{8}|\sigma(X)|$$

を満たす. ここで, $\sigma(X)$ は X の符号数を表す.

スピン多様体の交叉形式は even であり, even な不定値ユニモジュラー形式は, 符号数が正でないとき次の形式と同型であることが知られている:

$$p(-E_8) \oplus q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p \geq 0, q > 0.$$

閉 4 次元スピン多様体の場合 Rokhlin の定理より p は偶数でなければならない. 11/8 予想は次のように言い換えられる:

$$q \geq \frac{3}{2}p.$$

11/8 予想にまつわる進展としては, 古田幹雄氏 [13] によってもたらされた不等式が最も重要である:

定理 1.2 ([13]). 滑らかな閉 4 次元スピン多様体 X が不定値の交叉形式をもつなら

$$b_2(X) \geq \frac{10}{8}|\sigma(X)| + 2$$

を満たす.

上の不等式は符号数が非正のとき次のように言い換えられる:

$$q \geq p + 1. \tag{1.3}$$

Manolescu [33] は上記の古田の不等式 (1.3) を, ホモロジー球面 Y を境界に持つ 4 次元スピン多様体へと拡張した. これが本稿の主題である. まず, 結果を述べる.

定理 1.4 ([33]). 整係数ホモロジー球面 Y の不変量 $\kappa(Y) \in \mathbb{Z}$ が定義され, 以下の性質を持つ.

(i) $\kappa(Y)$ の mod 2 reduction は Rokhlin 不変量と一致する.

(ii) Y_0, Y_1 を 2 つの整係数ホモロジー球面とする. Y_0 から Y_1 への滑らかな負定値スピン・コボルディズム W に対し,

$$\kappa(Y_1) \geq \kappa(Y_0) + \frac{1}{8}b_2(W).$$

(iii) Y_0 から Y_1 への滑らかなスピン・コボルディズム W が交叉形式 $p(-E_8) \oplus q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を持つとき,

$$\kappa(Y_1) + q \geq \kappa(Y_0) + p - 1. \tag{1.5}$$

[1] Froyshov は 3 つの論文 [10, 11, 12] でそれぞれ定義の異なる不変量を構成している. それらの関係は以下のようだと思われる. [10] と [12] の不変量は Seiberg-Witten 理論を用いて定義され, おそらく [12] の不変量は [10] の精密化になっている. また [12] の不変量の Heegaard Floer 理論版が correction term [41] である. [11] の不変量 は [12] のインスタントン版と見なせるが, 定義されたのはこちらの方が先である.

上の定理の (iii) が古田の不等式 (1.3) の境界付き版に相当する. Manolescu による高次元の三角形分割予想に関する論文 [36] では, Pin(2) 同変 Seiberg-Witten Floer ホモロジーを用いて α, β, γ という不変量が定義され, それらの不変量は定理 1.4 の (i)(ii) の性質を満たしていた. 一方, 定理 1.4 の不変量 κ は, Floer ホモロジーではなく Pin(2) 同変 Seiberg-Witten Floer K 理論を用いて定義される. 古田の定理 (定理 1.2) が証明に Pin(2) 同変 K 理論を用いていたことを思い起こすなら, 定理 1.4(iii) の証明が同変 K 理論を用いることは納得できるものと思われる.

定理 1.4 において, W がホモロジー・コボルディズムのとき, W と $-W$ の両方に (ii) を適用すると $\kappa(Y_1) = \kappa(Y_0)$ が得られる. したがって,

系 1.6. $\kappa(Y)$ はホモロジー・コボルディズム不変量である.

注意 1.7. この系により, κ はホモロジー・コボルディズム群から $\mathbb{Z}$ への写像を定義するが, これは準同型にはならない. 注意 7.13 参照.

定理 1.4 はどのくらい強い拘束条件を与えているだろうか？そのためには具体例を観察してみるのが良い. 不変量 $\kappa(Y)$ の具体的計算例は以下の通りである.

定理 1.8 ([33]). (a) $\kappa(S^3) = 0$
(b) $\Sigma(2,3,m)$ を, 負定値 plumbing の境界として向きを入れた Brieskorn 球面とするとき,

$$\kappa(\Sigma(2,3,12n-1)) = 2, \quad \kappa(\Sigma(2,3,12n-5)) = 1,$$
$$\kappa(\Sigma(2,3,12n+1)) = 0, \quad \kappa(\Sigma(2,3,12n+5)) = 1.$$

(c) 逆の向きの Brieskorn 球面に対しては

$$\kappa(-\Sigma(2,3,12n-1)) = 0, \quad \kappa(-\Sigma(2,3,12n-5)) = 1,$$
$$\kappa(-\Sigma(2,3,12n+1)) = 0, \quad \kappa(-\Sigma(2,3,12n+5)) = -1.$$

定理 1.4(iii) において, $Y_0 = Y_1 = S^3$ とすると, 直前の定理より $\kappa(S^3) = 0$ であるので, 不等式 (1.5) は古田の不等式 (1.3) より弱い不等式しか与えない. ただ, このギャップは埋めることができる. 実は, 境界に現れるホモロジー球面の種類によって, (1.5) より強い不等式が得られることがあるのだ. 後にホモロジー球面に対し, Floer K_G-split という概念を導入する. (定義 5.11.) すると Y_0 が Floer K_G-split であるとき, 強い評価が得られる.

定理 1.9 ([33]). Y_0, Y_1 を整係数ホモロジー球面とし, Y_0 は Floer K_G-split であると仮定する. Y_0 から Y_1 への滑らかなスピン・コボルディズム W が交叉形式 $p(-E_8) \oplus q\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を持ち $q > 0$ のとき,

$$\kappa(Y_1) + q \geq \kappa(Y_0) + p + 1.$$

Floer K_G-split であるホモロジー球面は, S^3, $\pm\Sigma(2,3,12n+1)$, $\pm\Sigma(2,3,12n+5)$ である. 一方, $\pm\Sigma(2,3,12n-1)$, $\pm\Sigma(2,3,12n-5)$ は Floer K_G-split でない. 定理 1.9 において $Y_0 = S^3$ とすると

系 1.10 ([33]). X を, 境界が整係数ホモロジー球面 Y であるようなコンパクト 4 次元スピン多様体とする. X の交叉形式が $p(-E_8) \oplus q\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ かつ $q > 0$ のとき,

$$q \geq p + 1 - \kappa(Y).$$

この系で, さらに $Y=S^3$ とすると古田の不等式 (1.3) が再現される.

注意 1.11. Manolescu [33] とほぼ同時期に Furuta-Li [14] によって同様の結果が得られている. Manolescu [33] は証明に複素同変 K 理論を使うが, Furuta-Li [14] の方は局所係数付き複素同変 K 理論を用い, [33] よりも少し精密な結果が得られているようだ. 一方これらの結果が発表された数カ月後, J. Lin [26] は同変 KO 理論を用いることで [33] よりも少し精密な結果を得ている.

以下の節の構成を述べる. §2 で Monopole Floer ホモロジー (Seiberg-Witten Floer ホモロジー) について簡単に説明する. §3 で Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type $\mathrm{SWF}(Y)$ というものの構成のアウトラインを述べる. この $\mathrm{SWF}(Y)$ は, ホモロジーをとると Monopole Floer ホモロジーと一致する空間のホモトピー型で, $\mathrm{SWF}(Y)$ の K 理論を考えることが Seiberg-Witten Floer K 理論である. ここまでが準備である. §4 から §8 で, 本節で結果を紹介した Manolescu [33] の中身を紹介する.

また, 関連するトピックについて Manolescu 自身による解説記事 [32, 35] があるので読まれると良いだろう.

2 Chern-Simons-Dirac 汎関数と Monopole Floer ホモロジー

この節では Monopole Floer ホモロジー (Seiberg-Witten Floer ホモロジー) について簡単に説明する. (詳細は [21] 参照.)

Y を向き付けられた有理ホモロジー 3 球面 [2] とし, リーマン計量 g と spin^c 構造 $\mathfrak{c}$ が与えられているとする. S を $\mathfrak{c}$ のスピノル束とし, $L=\det S$ を determinant 直線束とする. S 上の spin^c 接続 B からディラック作用素 $D_B\colon\Gamma(S)\to\Gamma(S)$ が定義される.

今 $b_1(Y)=0$ なので, S 上の平坦な spin^c 接続 B_0 を基点となる接続として固定する. すると他の spin^c 接続 B は純虚数値 1 形式 $b\in i\Omega^1(Y)$ によって $B=B_0+b$ と表される.

定義 2.1. $i\Omega(Y)\oplus\Gamma(S)$ 上の Chern-Simons-Dirac 汎関数 CSD を次の式によって定義する: $(b,\phi)\in i\Omega(Y)\oplus\Gamma(S)$ に対し,

$$CSD(b,\phi)=\frac{1}{2}\left(-\int_Y b\wedge db+\int_Y\langle\phi,D_{B_0+b}\phi\rangle d\mathrm{vol}\right).$$

ゲージ変換群 $\mathcal{G}=\mathrm{Map}(Y,S^1)$ が $i\Omega(Y)\oplus\Gamma(S)$ に次のように作用する.

$$u(b,\phi)=(b-u^{-1}du,u\phi).$$

$b_1(Y)=0$ のとき CSD は $\mathcal{G}$ 作用で不変である. L^2 内積について, CSD の勾配ベクトル場は次で与えられる:

$$\nabla CSD(b,\phi)=(*da+\tau(\phi,\phi),D_{B_0+b}\phi).$$

ここで $\tau(\phi,\phi)$ は $\phi\otimes\phi^*\in\Gamma(\mathrm{End}(S))$ の trace-free part を Clifford 積によって自己双対純虚数値 2 形式と思ったものである.

- $\nabla CSD(b,\phi)=0$ という方程式が $(Y,\mathfrak{c})$ の Seiberg-Wiiten 方程式である. したがって, CSD の臨界点は Seiberg-Wiiten 方程式の解である.

[2] Monopole Floer ホモロジー自体は $b_1(Y)>0$ の場合にも定義されているが, 簡単のためここでは $b_1(Y)=0$ の場合に話を限定する.

- 一方, 下向きの勾配流の式
$$\frac{\partial}{\partial t}x(t) = -\nabla CSD(x(t))$$
は $\mathbb{R}\times Y$ という 4 次元多様体の Seiberg-Wiiten 方程式（を同時刻ゲージで表したもの）である.

粗く言って, CSD を Morse 関数とした Morse ホモロジーが Monopole Floer ホモロジー (Seiberg-Witten Floer ホモロジー) である. 但し, Morse ホモロジーの通常の構成は次の 2 点でうまくいかない.

(1) (無限次元). CSD を通常の Morse 関数と思おうとすると臨界点の指数は ∞ と考えられ意味を持たない. 実際, ヘシアンの負定値部分空間も正定値部分空間も無限次元である.

(2) ($\mathcal{G}$ 対称性). CSD は $\mathcal{G}$ 不変なので, そのままでは臨界点が $\mathcal{G}$ 軌道として無限次元の大きさを持って現れてしまう. そこで $\mathcal{G}$ 作用で割って考えたいのだが, 割ろうとすると $\mathcal{G}$ 作用が自由でないという難点がある. $\mathcal{G}$ 作用が自由でないのは $i\Omega(Y)\oplus\{0\}$ 上の点で, このような点を reducible と呼び, その固定部分群は S^1 である.[3] したがって $\mathcal{G}$ 作用で割ると, S^1 商特異点が現れる.

(1) については, 各臨界点の絶対的な指数は定義されないのだが、臨界点同士の相対的な指数が有限な値として定義される. すると相対指数が 1 である臨界点を結ぶ勾配流の trajectory の数を数えることで境界作用素が定義される.[4]

(2) に関して, S^1 商特異点をホモロジーに取り込むやり方に応じて Monopole Floer ホモロジーの 3 つのフレイバー $\widecheck{HM}_\bullet(Y,\mathfrak{c})$, $\widehat{HM}_\bullet(Y,\mathfrak{c})$, $\overline{HM}_\bullet(Y,\mathfrak{c})$ が定義される. これらは Heegaard Floer ホモロジーの 3 つのフレイバー $HF^+(Y,\mathfrak{c})$, $HF^-(Y,\mathfrak{c})$, $HF^\infty(Y,\mathfrak{c})$ と対応し, 対応するもの同士が同型であることの証明が Kutluhan-Lee-Taubes [22] によって与えられた.

定理 2.2 ([22])**.**
$$\widecheck{HM}_\bullet(Y,\mathfrak{c}) = HF^+(Y,\mathfrak{c})$$
$$\widehat{HM}_\bullet(Y,\mathfrak{c}) = HF^-(Y,\mathfrak{c})$$
$$\overline{HM}_\bullet(Y,\mathfrak{c}) = HF^\infty(Y,\mathfrak{c})$$

上で S^1 対称性を取り込むやり方に応じて Monopole Floer ホモロジーの 3 つのフレイバーが定義されると言ったが, 標語的に言うと, $\widecheck{HM}_\bullet \cong HF^+$ は Borel ホモロジー $H^G_\bullet$ に対応するものと考えられる. Borel ホモロジーとは, S^1 空間 X に対して $ES^1\to BS^1$ を普遍主 S^1 束として対角作用によるホモトピー商 $X\times_{S^1} ES^1$ を考え, そのホモロジーのことであった. 一方 $\widehat{HM}_\bullet \cong HF^-$, $\overline{HM}_\bullet \cong HF^\infty$ はそれぞれ co-Borel ホモロジー, Tate ホモロジーといったものに対応する.[5]

---

[3] $\mathcal{G}$ 作用が自由である点を irreducible と呼ぶ.

[4] その結果できあがるホモロジーは無限次元の「中間次元」あたりを見ているホモロジーとなる. そのため「$\infty/2$ 次元 Morse ホモロジー」という表現がされることもあるようだ.

[5] Borel, co-Borel, Tate ホモロジーの一般論について Appendix A に簡単にまとめた. S^1 の Borel, co-Borel, Tate ホモロジーは, キャップ積によって, $H^*_{S^1}(pt) = H^*(BS^1) = H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty) = \mathbb{Z}[U]$ 加群の構造が入る. Monopole Floer, Heegaard Floer 両ホモロジーの $\mathbb{Z}[U]$ 加群の構造はこれに対応する.

3 Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type

前節の終わりで, Monopole Floer ホモロジーの 3 種は Borel, co-Borel, Tate といった同変ホモロジーに「標語的に対応」と言ったが, これは今の段階では実体を欠くものの言い方である. なぜならこれらの同変ホモロジーを取るべき空間が定義されていないからである. そこで次の問を立てる.[6]

問. 3 次元多様体 Y に対して, 次の性質をもつ well-defined な S^1 空間 $\mathrm{SWF}(Y)$ は定義できるか？

(a) $\mathrm{SWF}(Y)$ は何らかの意味で Y の位相不変量である.

(b) $\mathrm{SWF}(Y)$ のしかるべき S^1 同変ホモロジーたちは Monopole Floer ホモロジーたちと同型である.

このような試みは過去に Cohen-Jones-Segal [4] によって, 特に symplectic Floer theory においてなされたが, 完成には至っていないようだ.

Manolescu [30] は, $b_1(Y) = 0$ なる Y と spin^c 構造 $\mathfrak{c}$ に対して, 基点付き S^1 空間 $\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{c})$ で, その安定 S^1 ホモトピー類が well-defined な Y の位相不変量となるものを構成することに成功した. さらに, この S^1 空間 $\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{c})$ の Borel, co-Borel, Tate ホモロジーを取ると, それぞれ Monopole Floer ホモロジー $\widecheck{HM}_\bullet(Y, \mathfrak{c})$, $\widehat{HM}_\bullet(Y, \mathfrak{c})$, $\overline{HM}_\bullet(Y, \mathfrak{c})$ と同型となることの証明が Lidman-Manolescu [24] によって最近与えられた.

このように $(Y, \mathfrak{c})$ の不変量が S^1 空間として定義される応用上の大きな利点は, 様々な代数トポロジー的な道具 (例えば種々の同変（コ）ホモロジー理論) を適用することで様々な不変量が直ちに得られることである.

Manolescu の $\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{c})$ は, 正確には, 古典的な Spanier-Whitehead graded suspension category の S^1 同変な類似物と考えられるあるカテゴリー $\mathfrak{C}$ の対象の同型類 (より精密には S^1 懸垂スペクトラム) として定義される. $\mathbb{R}$ を S^1 の自明な表現, $\mathbb{C}$ をかけ算による表現とする. $\mathfrak{C}$ の対象は次のような三つ組 (X, m, n) である：X は S^1 が作用する基点付き位相空間で S^1-CW 複体とホモトピー同値になるもの, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}$ である. 2 つの対象 (X, m, n), (X', m', n') の間の射の集合は $n - n' \in \mathbb{Z}$ のときのみ空でなく

$$\mathrm{colim}_{k,l \in \mathbb{Z}} [(\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{C}^l)^+ \wedge X, (\mathbb{R}^{k+m-m'} \oplus \mathbb{C}^{l+n-n'})^+ \wedge X']^{S^1}$$

である. ここで $(\cdot)^+$ は一点コンパクト化を表す. 例えば $\mathfrak{C}$ において次の 3 つの対象は同型である:

$$(X, m, n), \quad (\mathbb{R}^+ \wedge X, m+1, n), \quad (\mathbb{C}^+ \wedge X, m, n+1).$$

補足をすると, m, n は定義からわかるように $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ の懸垂についての情報を encode する量である. n が有理数なのは Monopole Floer ホモロジーが 3 次元多様体に応じて有理数値の absolute grading を持つことに関わる. ただの S^1 空間 X を $(X, 0, 0)$ とみなすことにすると, m, n が正整数のとき (X, m, n) は「形式的な」 desuspension $\Sigma^{-m\mathbb{R}} \Sigma^{-n\mathbb{C}} X$ に対応する.

V を S^1 がかけ算で作用する a 次元複素ベクトル空間とすると, V と $\mathbb{C}^a$ の間の S^1 空間としての同型写像の S^1 ホモトピー類は一意である. そのため次の定義が well-defined である.

$$\Sigma^{-V}(X, m, n) = (X, m, n + \dim_{\mathbb{C}} V).$$

[6] この問は, Monopole Floer ホモロジーの背後にある無限次元のフローの幾何は何か, という抽象的な問の一つの具体化ともいえるだろう.

W を S^1 が自明に作用する b 次元実ベクトル空間とすると, 同型写像 $\tau\colon W \to \mathbb{R}^b$ のホモトピー類は二通りある. しかし $\tau \oplus \tau$ のホモトピー類は一意に定まり, 次が well-defined である.

$$\Sigma^{-W}(X, m, n) = (\Sigma^W X, m + 2\dim_{\mathbb{R}} W, n).$$

注意 3.1. S^1-equivariant stable 0-stem $\pi_0^{S^1}(S^0)$ は S^1 の Burnside ring $A(S^1)$ と同型で $\mathbb{Z}$ と同一視される. 単元は ± 1 のみであり, 向きを保つかどうかで区別される.

$\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{c})$ の構成を簡単に説明する. 構成のポイントは次の 2 点である.

(1) **有限次元近似**. CSD の勾配流は無限次元空間上のフローである. これを古田 [13] において 10/8 不等式の証明に用いられた有限次元近似の考え方を使って有限次元部分空間上のフローとして近似する.

(2) **Conley 指数**. Conley 指数 [7] とは力学系のある種の「ホモトピー不変量」である. (正確な定義は後述する.) Morse 指数の一般化と見ることができるが Conley 指数は数ではなくホモトピー型である. (1) で得られた有限次元の力学系の Conley 指数が, 本質的に $\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{c})$ である.

$\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{c})$ の構成のアウトラインを述べる. (詳細は原論文 [30] 参照.[8])

Step 1 (Coulomb projection). ゲージ変換群 $\mathcal{G}$ の部分群 $\mathcal{G}_0$ を

$$\mathcal{G}_0 = \left\{ g = e^{i\xi} \;\middle|\; \xi\colon Y \to \mathbb{R}, \int_Y \xi \, d\mathrm{vol}_g = 0 \right\}$$

と定義すると, $\mathcal{G}_0$ は $i\Omega(Y) \oplus \Gamma(S)$ に自由に作用し, $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0 = S^1$ となる. S^1 作用を残して $\mathcal{G}_0$ 作用で割りたいのだが, 実際に商空間上でものを考える代わりに $\mathcal{G}_0$ 作用のスライス (Coulomb slice) の上に計量もフローも全てを射影して (Coulomb projection) 考える.[9] Coulomb slice は次で与えられる.

$$V = i \ker d^* \oplus \Gamma(S).$$

V には S^1 が作用する. S^1 は $i \ker d^*$ には自明に, $\Gamma(S)$ にはかけ算で作用する.

勾配流の方程式は次のように表すことができる:

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t) = -(l + c)(x(t)). \tag{3.2}$$

ここで l は $l(a, \phi) = (*da, D_{B_0 + a}\phi)$ という自己共役線形作用素である, c は微分を含まない (a, ϕ) に関するある二次形式である. 写像 l と c は S^1 同変であり, したがってフローもそうである. V を適当な Sobolev (L_k^2) ノルムで完備化すると, l は elliptic, c はコンパクト作用素となる.

粗く言って Seiberg-Witten モジュライのコンパクト性から, V 上のフローに関して非自明なことが起こるのは有界領域においてである. すなわち, 十分大きな $R > 0$ が存在し, 原点を中心とした半径 R の球体 $B(R)$ の中に, 全ての臨界点と臨界点同士を結ぶ有界な trajectory がすっぽり入るようにできる.

Step 2 (有限次元近似). $\tau < 0 \le \nu$ なる τ, ν に対し, V_τ^ν を, l の固有空間で固有値が $(\tau, \nu]$ に含まれるものたちで張られる V の有限次元部分空間とする. V に落としたフローをさらに V_τ^ν にま

[7] Conley 指数の一般論については例えば [5, 43, 45] を参照. Manolescu の原論文 [30] でも必要事項が解説されている.
[8] あまり参考にならないかもしれないが [40] にもちょっとした解説がある.
[9] 実は Coulomb slice に「全てを射影」できることのために $b_1(Y) = 0$ の仮定が必要である.

で落としたい. l は V^ν_τ を保つが, c の V^ν_τ への制限の像は一般に V^ν_τ をはみ出すかもしれない. そこで τ, ν に関して滑らかに変化する射影 $p^\nu_\tau\colon V \to V^\nu_\tau$ を構成する. (p^ν_τ は直交射影を平均化して作られる.) V 上の勾配流 (3.2) を近似する V^ν_τ 上のフローが次の式で与えられる:

$$\frac{\partial}{\partial t}x(t) = -(l + p^\nu_\tau c)(x(t)). \tag{3.3}$$

このフローも S^1 同変である.

Step 1 の終わりに述べたコンパクト性に対応することが V^ν_τ 上のフローについても成り立つ.

命題 3.4 ([30], Proposition 3.)**.** Step 1 の終わりの R に対し, ν, $-\tau$ を十分大きく取れば, (3.3) の trajectory $x(t)$ が 任意の t について $\overline{B(2R)}$ に含まれるなら, 実は $B(R)$ に含まれている.

Step 3 (Conley 指数). Conley 指数について簡単に解説する. 多様体 M 上に 1 パラメータ変換群 $\{\varphi_t\}$ が与えられたとしよう. コンパクト集合 $A \subset M$ に対し invariant set, $\mathrm{Inv}(A, \varphi)$, を次で定義する:

$$\mathrm{Inv}(A, \varphi) = \{x \in A \,|\, \varphi_t(x) \in A \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}.$$

$S = \mathrm{Inv}(A, \varphi)$ としたとき, $S \subset \mathrm{Int}A$ が成り立つなら, S を isolated invariant set と呼び, A を isolating neighborhood と呼ぶ.

定義 3.5. S を isolated invariant set とする. 次の条件を満たすコンパクト集合の対 (N, L) を, S の index pair と呼ぶ:

(1) $L \subseteq N \subseteq M$.

(2) $\mathrm{Inv}(N \setminus L, \varphi) = S \subset \mathrm{Int}(N \setminus L)$.

(3) L は N の exit set である:

$$\forall x \in N,\ \text{if } (\exists t > 0 \text{ s.t. } \varphi_t(x) \notin N) \Rightarrow (0 \le \exists \tau < t \text{ s.t. } \varphi_\tau(x) \in L).$$

(4) L は N において positively invariant である:

$$\text{Given } x \in L, t > 0,\ \text{if } (0 \le \forall s \le t, \varphi_s(x) \in N) \Rightarrow (0 \le \forall s \le t, \varphi_s(x) \in L)$$

Conley [5] は isolated invariant set は必ず index pair を持つことを示している.

定義 3.6. isolated invariant set S と index pair (N, L) に対し, 基点付き空間 $(N/L, [L])$ の基点付きホモトピー類を Conley 指数と呼び, $I(S)$ と書く.

例 3.7. 有限次元多様体 X 上の Morse 関数 f について Morse flow を考える. p を指数 k の非退化な臨界点とすると, p を内部に含み他の臨界点を含まない p のコンパクト近傍は $\{p\}$ を isolated invariant set とする isolating neighborhood である. このとき Conley 指数 $I(\{p\})$ は, k 次元球面のホモトピー型である.

Conley 指数は以下の性質を持つ.

(a) $I(S)$ は S のみによる. 実際, index pair N/L の異なる choice に対し, それらの間の標準的な基点付きホモトピー同値がある.

(b) フローの連続変形に対しても $I(S)$ は不変である．すなわち, フローの連続族 φ^r ($r \in [0,1]$) について, 固定されたコンパクト集合 A が あって, r を動かしたときに A が $S_r = \mathrm{Inv}(A, \varphi^r)$ の isolating neighborhood であるときに, $I(S_0)$ と $I(S_1)$ は基点付きホモトピー同値である．この基点付きホモトピー同値も標準的である.[10]

注意 3.8. 上の (a)(b) における標準的ホモトピー同値写像はフローを用いて構成される．また, Conley 指数の定義において, ただ抽象的にホモトピー同型類が定まっているだけでは well-defined とは言いがたいという立場もあるので, より洗練された Conley 指数の概念が考えられることがある．その場合, index pair のとり方に応じた基点付き空間全部と, それらの間の標準的写像のホモトピー類全部をあわせたものを Conley 指数と呼ぶ [43].

我々の状況ではフローに S^1 が作用していた. Conley 指数についても, コンパクト Lie 群 G が作用する状況下での G 同変版が考えられている [9, 42]. G 同変なフロー φ とその isolated invariant set S に対し, G 不変な index pair (N, L) の存在が示され, G 同変ホモトピーのレベルで well-defined な G 同変 Conley 指数 $I_G(S)$ が定義される．

準備は整った．我々の状況を思い出そう．有限次元近似 V^ν_τ 上に $l + p^\nu_\tau c$ で生成される S^1 同変なフロー φ^ν_τ がある．$\overline{B(2R)}$ からはみ出ることのない trajectory たちの上の点全てを集めた集合を S^ν_τ とすると, 命題 3.4 から $S^\nu_\tau \subset B(R)$ である．実際 S^ν_τ は isolated invariant set であり, $\overline{B(R)}$ がその isolating neighborhood である．したがって S^1 同変 Conley 指数を得る:

$$I^\nu_\tau = I_{S^1}(S^\nu_\tau).$$

例 3.9. 我々の状況において $V = V^\nu_\tau$ の原点 θ は唯一の reducible な臨界点 (すなわち S^1 固定点でもある臨界点) である．今 θ は次数が 0 で非退化と仮定し, さらに θ 以外に次数 1 の irreducible の臨界点 S が一つだけあったと仮定しよう．irreducible には S^1 が自由に作用するので, 「一つ」の意味は臨界点集合の成分として S^1 が一つということである．つまり $S = S^1$. この臨界点 S も Morse-Bott の意味で非退化と仮定する．この状況下で, $\nu, -\tau \gg 0$ のとき, S^1 同変 Conley 指数 $I^\nu_\tau = I_{S^1}(S^\nu_\tau)$ は attaching map

$$f \colon \Sigma S \to \Sigma I(\Theta)$$

で決定される ([31, Section 6])．ここで, $I(\Theta)$ は原点一点からなる isolated invariant set $\Theta = \{\theta\}$ の Conley 指数である．attaching map は $\{S^1, S^0\}_{S^1} = \{S^0, S^0\} = \mathbb{Z}$ で分類される．今この attaching map f の degree が 1 だったと仮定する．すると I^ν_τ は S^1 の unreduced suspension $\tilde{S}^1$ であることがわかる．unreduced suspension の片方の頂点が Conley 指数の基点であり, もう一方の頂点は原点 θ である．

次数 0 の原点 θ のほかに次数 1 の irreducible な非退化な臨界点が n 個あるとき, 対応する Conley 指数は n 個の $\tilde{S}^1$ を原点と基点で束ねたものになるが, この空間は次と S^1 ホモトピー同値であることがわかる．

$$\tilde{S}^1 \vee \underbrace{\Sigma(S^1_+) \vee \cdots \vee \Sigma(S^1_+)}_{n-1}.$$

ここで S^1_+ は S^1 と基点の disjoint union を表す．この表示は後の計算で便利な表示である．

Step 4 (SWF$(Y, \mathfrak{c})$)**.** 直前のステップで, 欲しかった S^1 空間 I^ν_τ が得られた. 次の工程は, この空間から Y の計量や τ, ν といったパラメータに依存しない $\mathfrak{C}$ の対象を作ることである. (正確にはパラメータを変えると $\mathfrak{C}$ 内で同型な別の対象に変わるものが作られる.)

[10] これが「ホモトピー不変性」の意味である．Conley 指数のこの著しい性質が, SWF$(Y, \mathfrak{c})$ の well-definedness の証明の最も crucial な部分であると思われる．

τ, ν を動かすときの変化は, $l + p_\tau^\nu c$ の挙動を調べることで次のことが比較的容易にわかる:

補題 3.10 ([30])**.** $\tau' \leq \tau$, $\nu' \geq \nu$ のとき

$$I_{\tau'}^{\nu'} \cong (V_{\tau'}^{\tau})^+ \wedge I_\tau^\nu.$$

$(\tau, \nu]$ を $(\tau', \nu']$ に拡大するとき, $V_{\tau'}^{\tau}$ は l の負定値部分空間の増大分を表している. 仮に非線形項 $p_\tau^\nu c$ が無かったとするなら, $(\tau', \nu']$ への拡大で原点の指数が $V_{\tau'}^{\tau}$ の次元分増加し, Conley 指数としては補題の関係が成り立つことがわかる. 上の補題は非線形項があってもそれが成り立つことを言っている.

補題 3.10 より, 固定された $n \in \mathbb{Q}$ に対して, $\mathfrak{C}$ の対象 $\Sigma^{-V_\tau^0}(I_\tau^\nu, 0, n)$ は τ, ν を変化させても $\mathfrak{C}$ の中で同型であることがわかる.

次に計量を動かすと何が起こるのかを考える. 線形項 l の一つの成分は Dirac 作用素であったが, これの指数は計量に依存してしまう. したがって, τ を固定していたとしても, 計量を動かすと一般に V_τ^0 の次元が変わってしまう. そこで, この変化を detect する量 $n(Y, \mathfrak{c}, g)$ を以下のように導入する. W を有向閉 4 次元多様体で $b_1(W) = 0$ をみたし, Y を境界として持つとする. W に境界 Y の近傍が $[0,1] \times Y$ と等長となるようなリーマン計量 $\hat{g}$ を固定する. Y の Spin^c 構造 $\mathfrak{c}$ を W 上に拡張し, その determinant line bundle を $\hat{L}$ とする. $\hat{A}$ を Y の近傍で最初に固定した平坦接続 B_0 の引き戻しになっている $\hat{L}$ の接続とする. このとき $c_1(\hat{L})^2$ が $\mathbb{Q}$ の元として定まる. (正確には $N = |H_1(Y;\mathbb{Z})|$ として $c_1(\hat{L})^2 \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$ である.)

$\hat{A}$ に同伴する Dirac 作用素を $D_{\hat{A}}^{\pm}$ とし, Atiyah-Patodi-Singer のスペクトル境界条件 [1] を置く. τ を固定して, 計量を動かしたときの V_τ^0 の次元の変化は $(Y, \mathfrak{c})$ の Dirac 作用素の spectral flow と等しく, これは Atiyah-Patodi-Singer の指数定理 [2] から $\mathrm{ind}_{\mathbb{C}}(D_{\hat{A}}^+)$ の差と等しい:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_\tau^0)_{g_0} - \dim_{\mathbb{R}}(V_\tau^0)_{g_1} = SF(-D_{A,g_t}) = \mathrm{ind}_{\mathbb{C}}(D_{\hat{A},\hat{g}_1}^+) - \mathrm{ind}_{\mathbb{C}}(D_{\hat{A},\hat{g}_0}^+).[11]$$

しかし, $\mathrm{ind}_{\mathbb{C}}(D_{\hat{A}}^+)$ は W に依存してしまう量なので, W の符号数を $\sigma(W)$ として, $n(Y, \mathfrak{c}, g)$ を次のように定義する:

$$n(Y, \mathfrak{c}, g) = \mathrm{ind}_{\mathbb{C}}(D_{\hat{A}}^+) - \frac{c_1(\hat{L})^2 - \sigma(W)}{8} \in \frac{1}{8N}\mathbb{Z}. \tag{3.11}$$

これは $(Y, \mathfrak{c}, g)$ のみで決まり, W 等諸々の choice に依存しない. 以上より次の関係が得られる.

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_\tau^0)_{g_0} + 2n(Y, \mathfrak{c}, g_0) = \dim_{\mathbb{R}}(V_\tau^0)_{g_1} + 2n(Y, \mathfrak{c}, g_1).$$

以上の議論から

$$\Sigma^{-V_\tau^0}(I_\tau^\nu, 0, n(Y, \mathfrak{c}, g)) \tag{3.12}$$

という $\mathfrak{C}$ の対象を考えると, $\mathfrak{C}$ の中で τ, ν, g の choice によらず同型な対象を定義することがわかる. ナイーヴには Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type $\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{c})$ は (3.12) の $\mathfrak{C}$ における同型類として定義される.

Manolescu [30] はより精密に, τ, ν, g を取り替えたときに, 標準的な同型射が定義されることを示している. したがって $\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{c})$ をより精密に, ある種の S^1 同変懸垂スペクトラムとして定義することができる. すなわち, $\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{c})$ は $\mathfrak{C}$ の対象 (3.12) 全体と, それらの間の標準的同型射の系として定義される.

注意 3.13. ここで Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type についていくつか注意をしておく.

[11] 但し, t を動かしたとき, τ は D_{A,g_t} の固有値にならないと仮定する.

- 本節では [30] の内容を少し詳しく説明したが, [30] には相対不変量のところで一箇所技術的なギャップがあることが知られている [34]. このギャップは T. Khandhawit [18] によって修正されている. 一方, 貼り合わせ公式を扱った [31] にも技術的なギャップが見つかっているそうだが, Khandhawit-J. Lin-Sasahira [19] において修正されるとのことだ.

- [30] は $b_1(Y)=0$ の場合のみを扱っている. $b_1(Y)>0$ の場合への拡張として, Kronheimer-Manolescu [20], T. Khandhawit [16], Sasahira [44] がある. $b_1(Y)>0$ のとき, 理論全体が $b_1(Y)$ 次元の (Picard) トーラス上の族として定式化されるので, そのことが様々な困難を引き起こす. 例えば, $b_1(Y)=0$ であれば, Step 1 において, 一枚の Coulomb slice の上に全てを射影して考えることができたが, $b_1(Y)>0$ のときはそう簡単にはいかない. $b_1(Y)>0$ のときの困難を克服するやり方として, [20] と [44] は同じ戦略をとるが [16] は異なる. 詳細はここでは述べない. また Khandhawit-J. Lin-Sasahira [19] では $b_1(Y)>0$ のときの相対不変量と貼りあわせ公式が扱われるそうだ.

- 本節で解説した [30] の方法では有限次元近似を取ってから Conley index theory に持ち込むという手順を踏むが, 有限次元近似を経由せずに無限次元からより直接的に $\mathrm{SWF}(Y,\mathfrak{s})$ を構成できないかという問が考えられる. そのために無限次元 (あるいは $\infty/2$ 次元) の Conley index theory をしかるべく建設するという方針が考えられるが, その方向の研究として T. Khandhawit [17] がある. 関連するトピックとして, Floer ホモロジーの幾何的な記述としてある種の $\infty/2$ 次元のボルディズム理論を構成する Lipyanskiy [29] がある.

4 スピン構造と $\mathrm{Pin}(2)$ 作用

$\mathfrak{s}$ をスピン構造から定まる spin^c 構造とすると, $\mathfrak{s}$ のスピノル束に四元数の構造が入り, ディラック作用素は $\mathbb{H}$ 線形になる. すると理論全体の対称性は S^1 対称性から $G=\mathrm{Pin}(2)$ 対称性へと拡大する. ここで $\mathrm{Pin}(2)=S^1\cup jS^1\subset\mathbb{H}$ である. 実際 Coulomb slice $V=i\ker d^*\oplus\Gamma(S^+)$ への G 作用は, スピノルへは四元数のかけ算, 1 形式へは符号準同型 $G\to\{\pm1\}$ を経由して与えられる. 符号準同型とは, S^1 の元を 1 に写し j を -1 に写す準同型である. この作用について l, c は G 同変であり, したがってフローも G 同変である. 前節の議論を S^1 同変から G 同変に変えることで, G 同変 Conley 指数を得る.

$$I_\tau^\nu = I_G(S_\tau^\nu).$$

G 同変な $\mathrm{SWF}(Y,\mathfrak{s})$ を定義したいが G が S^1 より少し難しくなっている分, 計量の取り替えに関する well-definedness が少し厄介である. (Manolescu [36], §3.4 参照.) われわれの目的のためには $\mathrm{SWF}(Y,\mathfrak{s})$ を G 懸垂スペクトラムとしてフル装備する必要はなく, しかるべき G 安定ホモトピー類として定義されていれば十分なので, Manolescu [33] に従いそれを解説する.

まず G の実表現について記号を用意する.

(1) $\mathbb{R}$ を自明な 1 次元表現とする.

(2) $\tilde{\mathbb{R}}$ を 1 次元符号表現, すなわち S^1 が自明に作用し, j が -1 の掛け算で作用する表現とする.

(3) $\mathbb{H}$ を G の四元数としての左からの掛け算による表現とする.

さらに $\tilde{\mathbb{C}}=\tilde{\mathbb{R}}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ とする. 実表現として $\tilde{\mathbb{C}}$ は $\tilde{\mathbb{R}}^2$ と同型である. さて, I_τ^ν は次のような構造を持つと仮定できる.

補題 4.1 ([36], Lemma 3.6)**.** 十分大きな $\nu, -\tau$ に対し, S_τ^ν の index pair (N, L) で, Conley 指数 $X = I_\tau^\nu = N/L$ が次を満たすものが存在する:

(a) X の S^1 固定点集合 X^{S^1} は s 次元球面 $(\tilde{\mathbb{R}}^s)^+$ $(s \geq 0)$ に G ホモトピー同値.

(b) $X \setminus X^{S^1}$ への G 作用は自由.

定義 4.2. 上の (a)(b) を満たす基点付き G-CW 複体 X をレベル s の SWF 型空間と呼ぶ.

補題 4.1 の証明のアウトライン. V の原点は reducible(S^1 固定点) かつ臨界点である唯一の点である. V^{S^1} 上 $c = 0$ であり, したがって V^{S^1} 上に制限したフローは原点のみを臨界点として l の制限によって生成される線形なフローである. 有限次元近似 V_τ^ν を取っても, $(V_\tau^\nu)^{S^1}$ への制限は原点のみを臨界点とした線形なフローであり, $(V_\tau^\nu)^{S^1}$ に制限したときの原点一点からなる isolated invariant set の Conley 指数は, 原点のヘシアンの負定値部分空間の次元を s とすると s 次元球面 $(\tilde{\mathbb{R}}^s)^+$ に G ホモトピー同値である. また $V_\tau^\nu \setminus (V_\tau^\nu)^{S^1}$ への G 作用は自由である. □

後に X の複素 K_G 理論を考えるが, そのとき s が偶数になるように取る. $s = 2t$ であれば G 同変 Bott 周期性から

$$\tilde{K}_G(X^{S^1}) \cong \tilde{K}_G((\tilde{\mathbb{C}}^t)^+) \cong R(G)$$

が成り立ち後の議論で都合が良いからである.[12] ここで $R(G)$ は G の複素表現環である.

X をレベル s が偶数の SWF 型空間とし, 三つ組 (X, m, n) $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Q})$ を考える. このような三つ組たちの間の同値関係を次のように定義する.

定義 4.3. (X, m, n) と (X', m', n') が stably even equivalent であるとは, $n - n' \in \mathbb{Z}$ を満たし, 次のような M, N, $r \geq 0$ と G ホモトピー同値写像が存在することである:

$$\Sigma^{r\mathbb{R}}\Sigma^{(M-m)\tilde{\mathbb{C}}}\Sigma^{(N-n)\mathbb{H}}X \xrightarrow{\sim} \Sigma^{r\mathbb{R}}\Sigma^{(M-m')\tilde{\mathbb{C}}}\Sigma^{(N-n')\mathbb{H}}X'.$$

$\mathfrak{E}$ を (X, m, n) の stably even equivalence class 全体の集合とし, $\mathfrak{E}$ の元を spectrum class と呼ぶ.[13]

5 SWF 型空間の同変 K 理論と不変量 $\kappa(Y, \mathfrak{s})$

以上の準備のもとに $(Y, \mathfrak{s})$ の K 理論的な不変量 $\kappa(Y, \mathfrak{s})$ を定義する. まず $G = \mathrm{Pin}(2)$ の表現環 $R(G)$ について, いくつかの事実を思い出す.

事実 5.1. 表現環 $R(G)$ は $\tilde{c} = [\tilde{\mathbb{C}}]$ と $h = [\mathbb{H}]$ で生成され, それらの間の関係は $\tilde{c}^2 = 1$, $\tilde{c}h = h$ である.

生成元を次のように取り替える

$$w = \lambda_{-1}(\tilde{\mathbb{C}}) = 1 - \tilde{c}, \quad z = \lambda_{-1}(\mathbb{H}) = 2 - h.$$

すると

$$R(G) = \mathbb{Z}[w, z]/(w^2 - 2w, zw - 2w)$$

[12] Furuta-Li [14] ではレベルが偶数という仮定をおかず, 局所係数付きで考える.

[13] (X, m, n) は S^1 のときと同じ記号であるが, ここでの m は複素次元に, n は四元数の次元に対応するので S^1 のときの 1/2 となる. 記号を変えた方が安全かもしれないが [33] に合わせてそのままにしておく.

と表され, augmentation homomorphism は

$$R(G) \to \mathbb{Z}, \quad w, z \mapsto 0,$$

augmentation ideal は $\mathfrak{a} = (w, z)$ である.

注意 5.2. w, z はそれぞれ $\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{H}$ を 1 点上の G ベクトル束と思った時の K_G 理論的 Euler 類である.

X をレベルが偶数の SWF 型空間とする. $\iota\colon X^{S^1} \to X$ を inclusion とし, これの誘導する準同型 $\iota^*\colon \tilde{K}_G(X) \to \tilde{K}_G(X^{S^1})$ を考える. 今 $X^{S^1} \cong (\tilde{\mathbb{C}}^t)^+$ なので, $\tilde{K}_G(X^{S^1})$ は Bott 周期性より Bott class $b_{t\tilde{\mathbb{C}}}$ を生成元とする自由な $R(G)$ 加群である. したがって $R(G)$ のイデアル $\mathfrak{J}(X)$ で, $\mathfrak{J}(X) \cdot b_{t\tilde{\mathbb{C}}} = \operatorname{Im} \iota^*$ となるものが定まる.

補題 5.3 ([33])**.** レベルが偶数の SWF 型空間 X に対し, 十分大きな $k \geq 0$ があって $w^k \in \mathfrak{J}(X)$ かつ $z^k \in \mathfrak{J}(X)$ が成り立つ.

Proof. 次の完全系列を考える:

$$\cdots \to \tilde{K}_G(X) \xrightarrow{\iota^*} \tilde{K}_G(X^{S^1}) \to \tilde{K}_G(X/X^{S^1}) \to \cdots .$$

X/X^{S^1} への G 作用は基点を除き自由なので augmentation ideal の元 $w, z \in \mathfrak{a}$ は nilpotent に $\tilde{K}_G(X/X^{S^1}) \cong \tilde{K}((X/X^{S^1})/G)$ へ作用する ([3], Proposition 4.3 の証明参照). $\square$

$R(G)$ において, $w^2 = wz = 2w$ なので $w \cdot w^k = w \cdot z^k = 2^k w$ が成り立つ. そこで次の定義をする.

定義 5.4. レベルが偶数の SWF 型空間 X に対し

$$k(X) = \min\{\, k \geq 0 \mid \exists x \in \mathfrak{J}(X), wx = 2^k w\}.$$

注意 5.5. Furuta-Li [14] も同様の不変量を定義しているが, Manolescu のものと定義がだいぶ異なるように見えるかもしれない. Furuta-Li [14] では局所係数 K_G 理論が用いられるという違いはあるが, 不変量の取り出し方に本質的な違いはないと言って良いと思われる. 特に, 上の $k(X)$ を Furuta-Li [14] の方式で定式化すると以下のようになる. $\mathrm{tr}_j\colon R(G) \to \mathbb{Z}$ を j の指標とすると, tr_j による w, z の像はともに 2 である. すると $\mathfrak{J}(X)$ の tr_j による像は, ある k が存在して 2^k で生成される $\mathbb{Z}$ のイデアルである. この k が上の $k(X)$ と一致する.

一方, J. Lin [26] の不変量もやや混み入って見えるが設計思想は上記のものと同様である. 基本は tr_j を利用しているが, それを KO_G 群の次数に応じて精密化したものを用いている.

以下, $\mathfrak{J}(X)$, $k(X)$ の性質を列挙する ([33], §3).

補題 5.6. レベルが偶数の SWF 型空間 X に対し,

$$\mathfrak{J}(\Sigma^{\tilde{\mathbb{C}}} X) = \mathfrak{J}(X), \quad \mathfrak{J}(\Sigma^{\mathbb{H}} X) = z \cdot \mathfrak{J}(X).$$

したがって

$$k(\Sigma^{\tilde{\mathbb{C}}} X) = k(X), \quad k(\Sigma^{\mathbb{H}} X) = k(X) + 1.$$

補題 5.7. X と X' をレベルが偶数の SWF 型空間とする. ある $r \geq 0$ に対して $\Sigma^{r\mathbb{R}} X$ から $\Sigma^{r\mathbb{R}} X'$ への G ホモトピー同値写像があるとき, $\mathfrak{J}(X) = \mathfrak{J}(X')$, $k(X) = k(X')$ である.

補題 5.8. X と X' をレベルが同じ偶数 $2t$ であるような SWF 型空間とする．$f\colon X \to X'$ を G 同変写像で, S^1 固定点集合への制限 $f|_{X^{S^1}}$ が G ホモトピー同値写像だったと仮定する．このとき

$$k(X) \leq k(X').$$

補題 5.9. X と X' をレベルがそれぞれ $2t, 2t'$ であるような SWF 型空間とし, $t < t'$ を仮定する．$f\colon X \to X'$ を G 同変写像で, G 固定点集合への制限 $f|_{X^G}$ が G ホモトピー同値写像だったと仮定する．このとき

$$k(X) + t \leq k(X') + t'.$$

注意 5.10. 補題 5.8 と補題 5.9 はそれぞれ定理 1.4(ii), (iii) を示すのに用いられる.

いずれも証明は容易であるが, 議論の典型例として最初のもののみ証明を記す.

補題 5.6 の証明. $\Sigma^{\tilde{\mathbb{C}}}X$ についての主張は $(\Sigma^{\tilde{\mathbb{C}}}X)^{S^1} = \Sigma^{\tilde{\mathbb{C}}}(X^{S^1})$ という事実と Bott 周期性より従う．

$\Sigma^{\mathbb{H}}X$ についての主張を示すのに, inclusion から誘導される次の可換図式を考える:

$$\begin{CD}
\tilde{K}_G(\Sigma^{\mathbb{H}}X) @>>> \tilde{K}_G(X) \\
@V{\iota_2^*}VV @VV{\iota_*^1}V \\
\tilde{K}_G((\Sigma^{\mathbb{H}}X)^{S^1}) @>{\cong}>> \tilde{K}_G(X^{S^1})
\end{CD}$$

$(\Sigma^{\mathbb{H}}X)^{S^1} = X^{S^1}$ なので下の水平方向の写像は恒等写像である．また Bott 周期性 $\tilde{K}_G(\Sigma^{\mathbb{H}}X) \cong \tilde{K}_G(X)$ の下で, 上の水平方向の写像は $\lambda_{-1}(\mathbb{H}) = z$ のかけ算と同一視される．これより

$$\mathfrak{I}(\Sigma^{\mathbb{H}}X) = z \cdot \mathfrak{I}(X)$$

がしたがう． □

レベルが偶数の SWF 型空間 X, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}$ の三つ組 (X, m, n) に対し,

$$k(X, m, n) := k(X) - n$$

と定義する．さらに, (X, m, n) で代表される spectrum class $\mathcal{S} \in \mathfrak{C}$ に対し

$$k(\mathcal{S}) := k(X, m, n)$$

と定義する．補題 5.6, 補題 5.7 より, この定義は well-defined である．

Y を有理ホモロジー球面, g を Y の計量, $\mathfrak{s}$ をスピン構造から定まる Spin^c 構造とする．十分大きな $\nu, -\tau$ に対し以前のように Conley 指数 I_τ^ν を考える．V_τ^0 は 1 形式に対応する部分とスピノルに対応する部分の直和に分解するが, スピン構造の場合 1 形式の部分は $\tilde{\mathbb{R}}$ の直和 ($V_\tau^0(\tilde{\mathbb{R}})$ とする), スピノル部分は $\mathbb{H}$ の直和 ($V_\tau^0(\mathbb{H})$ とする) である:

$$V_\tau^0 = V_\tau^0(\tilde{\mathbb{R}}) \oplus V_\tau^0(\mathbb{H}).$$

補題 4.1 より I_τ^ν はレベルが $\dim_{\mathbb{R}} V_\tau^0(\tilde{\mathbb{R}})$ の SWF 型空間とみなせる．

$n(Y, \mathfrak{s}, g)$ に関しては, $(Y, \mathfrak{s})$ を拡張する 4 次元多様体としてスピン多様体 $(W, \hat{\mathfrak{s}})$ を取って考えると後々都合がよい．このとき

$$n(Y, \mathfrak{s}, g) = 2\,\mathrm{ind}_{\mathbb{H}} D_{\hat{A}} + \frac{\sigma(W)}{8} \in \frac{1}{8}\mathbb{Z}$$

である.

$r=\dim_{\mathbb{R}} V_\tau^0(\tilde{\mathbb{R}})$, $h=\dim_{\mathbb{H}} V_\tau^0(\mathbb{H})$ とし, spectrum class $\mathcal{S}(Y,\mathfrak{s})\in\mathfrak{E}$ を次のように定義する.

$$\mathcal{S}(Y,\mathfrak{s})=\begin{cases}\left[(I_\tau^\nu, \frac{1}{2}r, h+\frac{1}{2}n(Y,\mathfrak{s},g)\right] & \text{if } r \text{ is even}\\ \left[(\Sigma^{\mathbb{R}} I_\tau^\nu, \frac{1}{2}(r+1), h+\frac{1}{2}n(Y,\mathfrak{s},g)\right] & \text{if } r \text{ is odd}\end{cases}$$

§3 の議論から $\mathcal{S}(Y,\mathfrak{s})$ は ν, τ, g に依存せず, $(Y,\mathfrak{s})$ の不変量であることがわかる.

次のように $\kappa(Y,\mathfrak{s})$ を定義する:

$$\kappa(Y,\mathfrak{s})=2k(\mathcal{S}(Y,\mathfrak{s}))\in\frac{1}{8}\mathbb{Z}.$$

Y が整係数ホモロジー球面のとき $\mathfrak{s}$ は一意に定まるので単に $\kappa(Y)$ と表す. このとき $n(Y,\mathfrak{s},g)\in\mathbb{Z}$ となり, $\kappa(Y)\in\mathbb{Z}$ である. さらに, $\mathcal{S}(Y,\mathfrak{s})=[(X,m,h+\frac{1}{2}n(Y,\mathfrak{s},g))]$ と表したときに,

$$\kappa(Y)=2k(\mathcal{S}(Y,\mathfrak{s}))=2k(X)-2h-n(Y,\mathfrak{s},g)$$

なので $\kappa(Y,\mathfrak{s})$ は Rokhlin 不変量の持ち上げであることがわかる. (定理 1.4, (i).)

ここで序で言及した Floer K_G-split という概念を定義しておく.

定義 5.11. (i) レベルが偶数の SWF 型空間 X が K_G-split であるとは, ある $k\geq 0$ が存在して, $\mathfrak{I}(X)=(z^k)$ と表されることである.
(ii) $(Y,\mathfrak{s})$ が Floer K_G-split であるとは, 十分大きな $\nu,-\tau>0$ に対し, I_τ^ν もしくは $\Sigma^{\tilde{\mathbb{R}}} I_\tau^\nu$ が K_G-split であることである.

K_G-split を仮定すると補題 5.9 は以下のように強められる.

補題 5.12. X と X' をレベルがそれぞれ $2t$, $2t'$ であるような SWF 型空間とし, $t<t'$ を仮定する. さらに X は K_G-split だと仮定する. $f\colon X\to X'$ を G 同変写像で, G 固定点集合への制限 $f|_{X^G}$ が G ホモトピー同値写像だったと仮定する. このとき

$$k(X)+t+1\leq k(X')+t'.$$

6 SWF 型空間の例と $\kappa(Y,\mathfrak{s})$ の計算例

まずいくつか SWF 型空間の例を挙げる.

例 6.1. 最も単純な SWF 型空間は $X=S^0$ である. このとき, $\mathfrak{I}(S^0)=(1)$, $k(S^0)=0$ である. また補題 5.6 より,

$$\mathfrak{I}((\tilde{\mathbb{C}}^t\oplus\mathbb{H}^l)^+)=(z^l),\quad k((\tilde{\mathbb{C}}^t\oplus\mathbb{H}^l)^+)=l.$$

したがって球面 $(\tilde{\mathbb{C}}^t\oplus\mathbb{H}^l)^+$ は K_G-split である.

X をレベルが $2t$ の SWF 型空間とし, X' を, 基点を除いて G が自由に作用する空間とすると, $X\vee X'$ もレベルが $2t$ の SWF 型空間である. このとき $\tilde{K}_G(X\vee X')\cong\tilde{K}_G(X)\oplus\tilde{K}_G(X')$ であり, 次が容易にわかる:

$$\mathfrak{I}(X\vee X')=\mathfrak{I}(X),\quad k(X\vee X')=k(X).$$

したがって $X=(\tilde{\mathbb{C}}^t\oplus\mathbb{H}^l)^+$ のとき, $X\vee X'$ も K_G-split である.

Z を G が自由に作用する G-CW 複体とし, $Q = Z/G$ とおく. $\tilde{Z}$ を Z の unreduced suspension とすると, $\tilde{Z}$ はレベル 0 の SWF 型空間である. 次の完全系列を考える:

$$\cdots \to \tilde{K}_G(\tilde{Z}) \to \tilde{K}_G(S^0) \to \tilde{K}_G(\Sigma Z_+) \to \cdots$$

Z への G 作用は自由なので, $\tilde{K}^1_g(\Sigma Z_+) \cong \tilde{K}_G(Z_+) \cong K(Q)$ であり, 上の系列は次のように書ける:

$$0 \to K^1(Q) \to \tilde{K}_G(\tilde{Z}) \xrightarrow{\iota^*} R(G) \xrightarrow{\pi^*} K_G(Q) \to \tilde{K}^1_G(\tilde{Z}) \to 0. \tag{6.2}$$

ここで π^* は射影 $\pi \colon Z \to pt$ から誘導される準同型である. したがって $\mathfrak{J}(\tilde{Z}) \cong \ker \pi^*$ である.

例 6.3. $Z = G$ とし, G を左からのかけ算で作用させる. すると $Q = Z/G = pt$ である. 今の場合, (6.2) において π^* は augmentation homomorphism である. したがって

$$\mathfrak{J}(\tilde{G}) = (w, z), \quad k(\tilde{G}) = 1.$$

例 6.4. Z を, トーラス

$$T = S^1 \times jS^1 \subset \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C} = \mathbb{H}$$

とし, G を $\mathbb{H}$ への作用の制限として作用させる. このとき $Q = T/G \cong S^1$ であり, inclusion $pt \to S^1$ は同型

$$K(S^1) \xrightarrow{\cong} K(pt) = \mathbb{Z}$$

を誘導する. 以上より

$$\mathfrak{J}(\tilde{T}) = (w, z), \quad k(\tilde{T}) = 1.$$

注意 6.5. 例 6.3, 例 6.4 は K_G-split でない例である.

続いて spectrum class $\mathcal{S}(Y, \mathfrak{s})$ の例と $\kappa(Y, \mathfrak{s})$ の例を挙げる.

例 6.6. Y を, 正スカラー曲率計量 g を許容する有理ホモロジー球面とすると, [30, Section 10], [31, Section 7.1] より

$$\mathcal{S}(Y, \mathfrak{s}) = [(S^0, 0, n(Y, \mathfrak{s}, g)/2)]$$

であり,

$$\kappa(Y, \mathfrak{s}) = -n(Y, \mathfrak{s}, g)$$

である. 特に, $\mathcal{S}(S^3) = [(S^0, 0, 0)]$ で $\kappa(S^3) = 0$ である. (定理 1.8(a) が示された.)

例 6.7. $Y = \Sigma(2, 3, 12n-1)$ の $\kappa(Y)$ について. $\Sigma(2, 3, 12n-1)$ の Seiberg-Witten 方程式の解は次数 0 の reducible 一つと, 次数 1 の $2n$ 個の irreducible からなる.[14] irreducible たちは $j \in G$ の作用により 2 つの S^1 からなる n 個の組を形成する. $\mathcal{S}(\Sigma(2, 3, 12n-1))$ を代表する SWF 型空間は, n 個の自由なセル ΣG_+ を自明なセル S^0 に attach することで構成される. attaching map は $\{G_+, S^0\}_G \cong \{S^0, S^0\} \cong \mathbb{Z}$ の class で決定されるが, 今の場合 ± 1 であることが知られている. これより

$$\mathcal{S}(\Sigma(2, 3, 12n-1)) = [(\tilde{G} \vee \underbrace{\Sigma G_+ \vee \cdots \vee \Sigma G_+}_{n-1}, 0, 0)]$$

がわかる. (例 3.9 参照.) 例 6.3 より $k(\tilde{G}) = 1$ であり, G 作用が自由な空間をウェッジしても イデアル $\mathfrak{J}$ も k の値も変わらないので, $\mathcal{S}(Y)$ は Floer K_G-split ではなく, $\kappa(\Sigma(2, 3, 12n-1)) = 2k(\tilde{G}) = 2$ である.

[14] このあたりの事実については [31, Section 7.2] を参照. Morgan-Ozsvaáth-Yu [39] の解析が元になっている.

例 6.8. $Y=\Sigma(2,3,12n-5)$ のときは $\Sigma(2,3,12n-1)$ とよく似ているが, reducible の次数が -2, irreducible の次数が -1 である. それゆえ $\mathcal{S}(\Sigma(2,3,12n-5))$ は $\mathcal{S}(\Sigma(2,3,12n-1))$ の $\mathbb{H}$ の $1/2$ 個分の形式的 de-suspension である. すなわち

$$\mathcal{S}(\Sigma(2,3,12n-5))=[(\tilde{G}\vee\underbrace{\Sigma G_+\vee\cdots\vee\Sigma G_+}_{n-1},0,1/2)].$$

また, $\kappa(Y)=2(k(\tilde{G})-1/2)=1$ である. Floer K_G-split ではない.

例 6.9. $Y=\Sigma(2,3,12n+1)$ のときは次数 0 の reducible 一つと, 次数 -1 の irreducible が $2n$ 個ある. この場合 attaching map は自明なもの以外ありえないので

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\Sigma(2,3,12n+1))=&[(S^0\vee\underbrace{\Sigma^{-1}G_+\vee\cdots\vee\Sigma^{-1}G_+}_{n-1},0,0)]\\=&[(\mathbb{H}^+\vee\underbrace{\Sigma^3G_+\vee\cdots\vee\Sigma^3G_+}_{n-1},0,1)].\end{aligned}$$

また, これは Floer K_G-split であり, $\kappa(Y)=2(k(\mathbb{H}^+)-1)=0$ である.

例 6.10. $Y=\Sigma(2,3,12n+5)$ のときは $\Sigma(2,3,12n+1)$ のときの状況を次数 2 だけ上にシフトしたものになる.

$$\mathcal{S}(\Sigma(2,3,12n+5))=[(S^0\vee\underbrace{\Sigma^{-1}G_+\vee\cdots\vee\Sigma^{-1}G_+}_{n-1},0,-1/2)].$$

また, これは Floer K_G-split であり, $\kappa(Y)=2(k(\mathbb{H}^+)-1/2)=1$ である.

7 $\mathrm{SWF}(Y,\mathfrak{c})$ と $\mathrm{SWF}(-Y,\mathfrak{c})$ の S-duality

例 6.7–例 6.10 の Y の向きを逆にした $-Y$ に対して $\mathrm{SWF}(-Y,\mathfrak{s})$ を計算したい. 実は $\mathrm{SWF}(Y,\mathfrak{s})$ と $\mathrm{SWF}(-Y,\mathfrak{s})$ の間に G 同変な Spanier-Whitehead duality (S-duality) が成り立つ. 本節ではこのことを解説したい. 以下しばらくの間, Y の Spin^c 構造 $\mathfrak{c}$ は必ずしもスピン構造からくるものとは限らないとする.

まず, Y を $-Y$ に変えると Chern-Simon-Dirac 汎関数は符号を変えることに注意する. すなわち $CSD_{-Y}=-CSD_Y$ である. これは Y の勾配流 φ_t に対して, t の向きを入れ替えたフロー $\bar{\varphi}_t=\varphi_{-t}$ を考えると $-Y$ の勾配流になることを意味する. $\sigma<0\le\mu$ なる μ, σ に対し, $\bar{\varphi}_t$ についての V の有限次元近似を $\bar{V}^\mu_\sigma$ とすると $\bar{V}^\mu_\sigma=V^{-\sigma}_{-\mu}$ である. $\nu,-\tau\gg 0$ に対し, φ_t の invariant set $S^\nu_\tau(\subset V^\nu_\tau)$ は $\bar{\varphi}_t$ の invariant set でもある: $S^\nu_\tau=\bar{S}^{-\tau}_{-\nu}\subset\bar{V}^{-\tau}_{-\nu}$. φ_t, $\bar{\varphi}_t$ の index pair (N,L), $(\bar{N},\bar{L})$ について次を仮定できる.

- $N=\bar{N}$ で, これは $V^\nu_\tau=\bar{V}^{-\tau}_{-\nu}$ の余次元 0 の G 不変なコンパクト部分多様体.
- $\partial N=L\cup\bar{L}$, $\partial L=\partial\bar{L}=L\cap\bar{L}$.

ここで G を S^1 または $\mathrm{Pin}(2)$ とし, V を G の表現とする. V-duality を以下のように定義する [23].

定義 7.1. コンパクト G-CW 複体 X, Y が V-dual であるとは次のような G 写像 ε, η が存在することである:

$$\varepsilon\colon Y\wedge X\to S^V,\quad \eta\colon S^V\to X\wedge Y,$$

これらは次の stable G-homotopy commutative な図式を満たす:

$$\begin{tikzcd} S^V\wedge X \arrow[r, "\eta\wedge\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & X\wedge Y\wedge X \arrow[d, "\mathrm{id}\wedge\varepsilon"] \\ & X\wedge S^V, \end{tikzcd}\qquad \begin{tikzcd} Y\wedge S^V \arrow[r, "\mathrm{id}\wedge\eta"] \arrow[d, "\gamma"'] & Y\wedge X\wedge Y \arrow[d, "\varepsilon\wedge\mathrm{id}"] \\ S^V\wedge Y \arrow[r, "\sigma\wedge\mathrm{id}"'] & S^V\wedge Y, \end{tikzcd}$$

ここで γ は入れ替え, $\sigma\colon v\mapsto -v$ である.

系 7.2. $\mathcal{U}$ を, $V\subset\mathcal{U}$ なる G-universe とし, X,Y が V-dual であるとする. このとき $\{S^0,Y\}^G_{\mathcal{U}}$ と $\{X,S^V\}^G_{\mathcal{U}}$ は次の対応により同型である:

$$[\alpha]\mapsto[S^0\wedge X\overset{\alpha\wedge\mathrm{id}}{\to}Y\wedge X\overset{\varepsilon}{\to}S^V].$$

(X,A) を unbased な G-space の pair とするとき, inclusion $A\subset X$ の unreduced mapping cone を $C(X,A)$ と書く. cone point を基点とする.

命題 7.3. $(N;L,\bar{L})$ について, $C(N,L)$ と $C(N,\bar{L})$ は V^ν_τ-dual である.

Proof. $V=V^\nu_\tau$ とおく. S^V の unreduced suspension を $\tilde{\Sigma}S^V$ とする:

$$\tilde{\Sigma}S^V=(I\times S^V)/(0\times S^V\cup 1\times S^V)$$

潰す前の $I\times S^V$ を考える. $N\subset S^V$ より各 $t\in I$ について埋め込み $\{t\}\times N\subset\{t\}\times S^V$ が得られる. $C(N,L)$ の $\tilde{\Sigma}S^V$ への埋め込みが次のものから得られる. (正確には交わらないように perturb する必要がある.)

$$C'(N,L)=(\{1/3\}\times N)\cup([1/3,1]\times L)$$
$$C'(N,\bar{L})=(\{2/3\}\times N)\cup([0,2/3]\times\bar{L})$$

すると $\tilde{\Sigma}S^V\setminus C(N,L)$ は $C(N,\bar{L})$ と G-homotopic である. また $\varepsilon\colon C(N,L)\wedge C(N,\bar{L})\to S(\mathbb{R}\oplus V)$ が次で定義される:

$$(x,y)\mapsto\frac{x-y}{\|x-y\|}.$$

$\eta\colon S(\mathbb{R}\oplus V)\to C(N,L)\wedge C(N,\bar{L})$ は Pontrjagin-Thom 構成で定義される. □

$C(N,L)$, $C(\bar{N},\bar{L})$ はそれぞれ N/L, $\bar{N}/\bar{L}$ と G ホモトピー同値なので, (S^ν_τ,φ_t) の Conley 指数 $I_G(S^\nu_\tau,\varphi)$ と $(\bar{S}^{-\tau}_{-\nu},\bar{\varphi})$ のそれ $I_G(\bar{S}^{-\tau}_{-\nu},\bar{\varphi})$ は V^ν_τ-dual であることがわかる. $\mathrm{SWF}(Y,\mathfrak{c})$ と $\mathrm{SWF}(-Y,\mathfrak{c})$ の関係を見るのに, まず Atiyah-Patodi-Singer の指数定理 [1] より次が成り立つことに注意する.

$$n(Y,\mathfrak{c},g)+n(-Y,\mathfrak{c},g)=\dim_{\mathbb{C}}\operatorname{Ker}D_{B_0}.$$

さらに, 次元の関係

$$\dim V^0_\tau+\dim\bar{V}^0_{-\nu}+2\dim_{\mathbb{C}}\operatorname{Ker}D_{B_0}=\dim V^\nu_\tau$$

が成り立つ．すると SWF$(-Y,\mathfrak{c})$ は以下のように表示できる．

$$\begin{aligned}\mathrm{SWF}(-Y,\mathfrak{c}) =&\Sigma^{-\bar{V}^0_{-\nu}}(I_G(\bar{S}^{-\tau}_{-\nu}),0,n(-Y,\mathfrak{c},g))\\ =&\Sigma^{-V^{\nu}_{\tau}}\Sigma^{V^0_{\tau}}(I_G(\bar{S}^{-\tau}_{-\nu}),0,-n(Y,\mathfrak{c},g)).\end{aligned}$$

以下 $G=\mathrm{Pin}(2)$ とする．前節の Y に対して $\mathcal{S}(-Y)$ を求めたい．そのために $\tilde{G}$ 等の V-dual を求める．次の事実を用いる．

命題 7.4 ([23, III, Theorem 4.1])**.** G 空間対 (X,A) が G-ENR だとする．すなわちある G 表現 V が存在して, X も A も V 内の開集合のレトラクトとして V に埋め込まれるとする．このとき $C(X,A)$ と $C(V\setminus A,V\setminus X)$ は V-dual である．

例 7.5. 例 6.3 の $\tilde{G}$ は次の空間と同一視できる:

$$\tilde{G}\cong(\mathbb{C}\oplus\{0\}\cup\{0\}\oplus j\mathbb{C})^+\subset(\mathbb{C}\oplus j\mathbb{C})^+\cong\mathbb{H}^+.$$

$\mathbb{H}$ 内の原点を中心とした大きな球を B とし, $A=\mathbb{H}\backslash B$ とする．さらに $X=(\mathbb{C}\oplus\{0\}\cup\{0\}\oplus j\mathbb{C})\cup A$ として命題 7.4 を適用すると, $\tilde{G}$ の $\mathbb{H}$-dual は例 6.4 の $\tilde{T}$ であることがわかる．

例 7.6. 標準的な埋め込み $G\subset\mathbb{H}$ から, G_+ の $\mathbb{H}$-dual は $C(\mathbb{H},\mathbb{H}\setminus G)\cong\Sigma^3G_+$ であることがわかる．また ΣG_+ の $\mathbb{H}$-dual は Σ^2G_+ である．

以上をもとに前節の Y について $\mathcal{S}(-Y)$ を調べよう．

例 7.7. $\mathcal{S}(\Sigma(2,3,12n-1))=[(\tilde{G}\vee\Sigma G_+\vee\cdots\vee\Sigma G_+,0,0)]$ で reducible の次数は 0 なのでこの表示で $V^0_\tau=\{0\}$, $V^\nu_\tau=\mathbb{H}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(-\Sigma(2,3,12n-1)) =&\Sigma^{-\mathbb{H}}[(\tilde{T}\vee\underbrace{\Sigma^2G_+\vee\cdots\vee\Sigma^2G_+}_{n-1},0,0)]\\ =&[(\tilde{T}\vee\underbrace{\Sigma^2G_+\vee\cdots\vee\Sigma^2G_+}_{n-1},0,1)].\end{aligned}$$

$k(\tilde{T})=1$ なので, $\kappa(-\Sigma(2,3,12n-1))=2(k(\tilde{T})-1)=0$.

例 7.8. $\mathcal{S}(\Sigma(2,3,12n-5))$ は $\mathcal{S}(\Sigma(2,3,12n-1))$ の形式的な $\mathbb{H}$ の 1/2 個の desuspension だったので, $\mathcal{S}(-\Sigma(2,3,12n-5))$ は $\mathcal{S}(-\Sigma(2,3,12n-1))$ の形式的な $\mathbb{H}$ の 1/2 個の suspension である．したがって

$$\mathcal{S}(-\Sigma(2,3,12n-1))=[(\tilde{T}\vee\underbrace{\Sigma^2G_+\vee\cdots\vee\Sigma^2G_+}_{n-1},0,1/2)].$$

また $\kappa(-\Sigma(2,3,12n-1))=1$ である．

例 7.9. $\mathcal{S}(\Sigma(2,3,12n+1))=\Sigma^{\mathbb{H}}[(\mathbb{H}^+\vee\Sigma^3G_+\vee\cdots\vee\Sigma^3G_+,0,0)]$ $(V^0_\tau=V^\nu_\tau=\mathbb{H})$ の dual を取って,

$$\mathcal{S}(-\Sigma(2,3,12n+1))=[(S^0\vee\underbrace{G_+\vee\cdots\vee G_+}_{n-1},0,0)].$$

したがって $\kappa(-\Sigma(2,3,12n+1))=0$.

例 7.10. $\mathcal{S}(\Sigma(2,3,12n+5))$ は $\mathcal{S}(\Sigma(2,3,12n+1))$ を上に 2 次元シフトしたものなのでその dual は

$$\mathcal{S}(-\Sigma(2,3,12n+5)) = [(S^0 \vee \underbrace{G_+ \vee \cdots \vee G_+}_{n-1}, 0, 1/2)].$$

したがって $\kappa(-\Sigma(2,3,12n+5)) = -1$.

さて, V-dual な SWF 型空間に対して次が示せる.

補題 7.11 ([33]). X と X' をレベルがそれぞれ $2t$, $2t'$ の SWF 型空間とする. X と X' がある $V = \tilde{\mathbb{C}}^s \oplus \mathbb{H}^l$ $(s, l \geq 0)$ に対し V-dual だとすると,

$$k(X) + k(X') \geq l.$$

証明のポイントは Borsuk-Ulam の定理である. これより直ちに次が得られる.

命題 7.12 ([33]). $\kappa(Y) + \kappa(-Y) \geq 0$.

注意 7.13. 上の例から $Y = \Sigma(2,3,12n-1)$, $\Sigma(2,3,12n-5)$ のとき, $\kappa(Y) + \kappa(-Y) = 2$ なので, κ をホモロジー・コボルディズム群から $\mathbb{Z}$ への写像と思うとき, 準同型にはならないことがわかる.

8 コボルディズム

2 つの有理ホモロジー球面 Y_0, Y_1 の間に, 向き付けられた滑らかなコボルディズム W があったとしよう. W の Spin^c 構造 $\hat{\mathfrak{c}}$ に対し, その Y_0, Y_1 への制限をそれぞれ $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}_1$ としたとき, $(Y_0, \mathfrak{c}_0)$ と $(Y_1, \mathfrak{c}_1)$ の Monopole Floer ホモロジーの間に $(W, \hat{\mathfrak{c}})$ から誘導される準同型が定義された ([21]).[15] この準同型の SWF 安定ホモトピー版も Manolescu [30] で構成されており, それは $(Y_0, \mathfrak{c}_0)$, $(Y_1, \mathfrak{c}_1)$ の Conley 指数の間の同変な写像として定義される. [16]

ここでは W がスピンで $b_1(W) = 0$ の場合を考える. W の計量 $\hat{g}$ を一つ固定する. W のスピン構造を $\hat{\mathfrak{s}}$ とし, その Y_0, Y_1 への制限をそれぞれ $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{s}_1$ とする. 十分大きな $\nu, -\tau$ に対して, $(I_0)^\nu_\tau$, $(I_1)^\nu_\tau$ を $(Y_0, \mathfrak{s}_0)$, $(Y_1, \mathfrak{s}_1)$ それぞれに対して定義される Conley 指数とするとき, スピン・コボルディズム $(W, \hat{\mathfrak{s}})$ から次のような G 同変写像が定義される:

$$f\colon \Sigma^{m_0 \tilde{\mathbb{R}}} \Sigma^{n_0 \mathbb{H}} (I_0)^\nu_\tau \to \Sigma^{m_1 \tilde{\mathbb{R}}} \Sigma^{n_1 \mathbb{H}} (I_1)^\nu_\tau. \tag{8.1}$$

V_0, V_1 を $(Y_0, \mathfrak{s}_0)$, $(Y_1, \mathfrak{s}_1)$ それぞれの上の Coulomb slice とすると, 写像 f の懸垂の指数は次の関係式を満たす:

$$m_1 + \dim_{\mathbb{R}} \left((V_1)^0_\tau (\tilde{\mathbb{R}}) \right) = m_0 + \dim_{\mathbb{R}} \left((V_0)^0_\tau (\tilde{\mathbb{R}}) \right) + b_+(W)$$
$$n_1 + \dim_{\mathbb{H}} \left((V_1)^0_\tau (\mathbb{H}) \right) + \frac{1}{2} n(Y_1, \mathfrak{s}_1, g) + \frac{\sigma(W)}{8} = n_0 + \dim_{\mathbb{H}} \left((V_0)^0_\tau (\mathbb{H}) \right) + \frac{1}{2} n(Y_0, \mathfrak{s}_0, g)$$

さらに f は次の性質を持つ.

命題 8.2 ([30]). f の S^1 固定点集合への制限は, cokernel の次元が $b_+(W)$ であるような単射線形写像の一点コンパクト化である.

この事実があると, 補題 5.8, 補題 5.9, 補題 5.12 を用いて定理 1.4(ii)(iii), 定理 1.9 を示すのは容易である.

[15] Heegaard Floer ホモロジーに対しても同様の準同型があった.
[16] 定義はやや込み入っているのでここでは述べない.

9　おわりに

本稿で解説してきた [33] の少し前に発表された論文 [36] では, Pin(2) 同変 Monopole Floer (コ) ホモロジー的な不変量 α, β, γ が導入され, このうち β という不変量が高次元の三角形分割予想の否定的解決に応用された．これら α, β, γ については, 計算も進み, さらなる良い応用もなされ (Stoffregen [46, 47], *Cf.* Lidman-Manolescu [25]), また計算の道具も整いつつある (F. Lin [27, 28]) と言える．

一方本稿で解説してきた K 理論的な不変量 κ については, 計算例がスペクトラム不変量 $\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{s})$ が実際に計算されているものに未だ限られているようだ.[17] 不変量 κ は, おそらく Floer 理論初の K 理論的不変量であり, 他の (コ) ホモロジー的な不変量 (Froyshov 不変量, correction term や α, β, γ) と異なる射程と深さを持つことが期待される不変量である．計算技術の開発が望まれる.[18]

具体的な方策として, 問を一つ述べたい．$K_G(\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{s}))$ を $\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{s})$ 自体の計算を経由せずに計算したい．K_G 理論なのだから Atiyah-Hirzebruch のスペクトル系列を計算すればよい．

問. Floer 理論の枠組みの中で $K_G(\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{s}))$ 群に収束する Atiyah-Hirzebruch のスペクトル系列を定式化せよ．

もちろん Atiyah-Hirzebruch のスペクトル系列ができたところで計算が進む保証はないが, Brieskorn のように (irreducible な) 臨界点の次数が偶数のみ, あるいは奇数のみに限られるようなものでは collapse してくれるかもしれない (Matumoto [38]).

A　Borel, co-Borel, Tate (コ) ホモロジー

§2 で言及した Borel, co-Borel, Tate (コ) ホモロジーについて簡単にまとめる.[19] アーベル群 π に対し, $k = \{K_m\} = \{K(\pi, m)\}$ を Eilenberg-MacLane スペクトラムとする．常 (コ) ホモロジーは次のように表現された．

$$\begin{aligned}\tilde{H}_n(X;\pi) =& k_n(X) = [S^n, X \wedge k] = \mathrm{colim}_m [S^{n+m}, X \wedge K_m],\\ \tilde{H}^n(X;\pi) =& k^n(X) = [X \wedge S^{-n}, k] = [X, K_n].\end{aligned}$$

G をコンパクト Lie 群とし, $EG \to BG$ を普遍主 G 束とする．X を G-CW 複体とすると, X の (簡約) Borel (コ) ホモロジーは次のように定義される．

$$\tilde{H}^G_*(X;\pi) = \tilde{H}_*(EG_+ \wedge_G X;\pi), \quad \tilde{H}^*_G(X;\pi) = \tilde{H}^*(EG_+ \wedge_G X;\pi)$$

co-Borel (コ) ホモロジー $c\tilde{H}^G_*$, $c\tilde{H}^*_G$ はそれぞれ Borel (コ) ホモロジー $\tilde{H}^*_G$, $\tilde{H}^G_*$ の双対である．すなわち, ある G の表現 V について X' が X の V-dual だったとすると, $m = \dim V$ として,

$$c\tilde{H}^G_*(X;\pi) \cong \tilde{H}^{m-*}_G(X';\pi), \quad c\tilde{H}^*_G(X;\pi) \cong \tilde{H}^G_{m-*}(X';\pi)$$

が成り立つ．これは定義というより性質である．以下 $c\tilde{H}^G_*$, $c\tilde{H}^*_G$ の抽象的な定義を説明する．

[17]いまのところ §6, §7 で説明したものが全てであると思われる．

[18]だったら $\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{s})$ を計算すればいいじゃないかと思われるかもしれないが, $\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{s})$ それ自体の計算の方がずっと難しい問題である．

[19]あまり足を踏み入れたくない方向であり, 我々の目的のためには必ずしも足を踏み入れる必要がないかもしれない方向であるが, 後学のためのメモとして残しておく．厳密でない点, 筆者の勘違い等が入り込んでいる可能性もあるので注意していただけるとありがたい．最良の reference は Greenlees-May [15] と思われるが, Manolescu [36, Section 2] も参照されたい．

U を complete G-universe とし, GSU を U-indexed G-spectra のカテゴリーとする. $i\colon U^G \to U$ を inclusion とすると, indexing を U から U^G に制限する, forgetful functor $i^*\colon GSU \to GSU^G$ が定義され, さらにこれの左随伴 $i_*\colon GSU^G \to GSU$ が定義される. GSU^G の対象を naive G-spectrum という. ([15] を参照.)

Eilenberg-MacLane スペクトラム [20] k を自明な G 作用を持つ naive G-spectrum と見なし, $k_G = i_*k$ とする. Borel コホモロジーは

$$c(k_G) = F(EG_+, k_G)$$

という function G-spectrum で表現される. 実際

$$c(k_G)^n(X) = [S^{-n} \wedge X, c(k_G)]_G = [EG_+ \wedge X, K_n]_G = [EG_+ \wedge_G X, K_n] = \tilde{H}^n_G(X;\pi).$$

したがって $c(k_G)$ で表現される同変ホモロジー理論が co-Borel ホモロジーである:

$$c\tilde{H}^G_n(X;\pi) = c(k_G)_n(X) = [S^n, X \wedge c(k_G)]_G.$$

一方 Borel ホモロジーは $f(k_G) = k_G \wedge EG_+$ という G スペクトラムで表現されることが示されている ([15, Proposition 2.1]).

$$f(k_G)_n(X) \cong k_n(EG_+ \wedge_G \Sigma^{\mathrm{Ad}(G)} X) = \tilde{H}^G_n(\Sigma^{\mathrm{Ad}(G)} X;\pi) \cong \tilde{H}^G_{n-j}(X;\pi).$$

ここで $\mathrm{Ad}(G)$ は G の随伴表現であり, $j = \dim \mathrm{Ad}(G)$ とする. このように j だけ次元のシフトが起きる. したがって co-Borel コホモロジーは $f(k_G)$ によって表現されるコホモロジーである. 前の V-dual の記述と整合的にするためにはこちらも次元をシフトして定義する必要がある.

$$c\tilde{H}^{n-j}_G(X;\pi) = f(k_G)^n(X).$$

さて, $c(k_G)$ に cofibration sequence $EG_+ \to S^0 \to \tilde{E}G$ をスマッシュした列を考える. (ここで $\tilde{E}G$ は EG の unreduced suspension である.)

$$EG_+ \wedge c(k_G) \to c(k_G) \to \tilde{E}G \wedge c(k_G). \tag{A.1}$$

この列の最初のものは $f(k_G)$ と同値であることが知られている.

定理 A.2 ([15]). $f(k_G)$ と $EG_+ \wedge c(k_G)$ は同値な G スペクトラムである.

一方 (A.1) の 3 番目の項 $\tilde{E}G \wedge c(k_G)$ を $t(k_G)$ とおく. $t(k_G)$ によって表現されるホモロジーとコホモロジーを Tate ホモロジー, Tate コホモロジーと呼び, $t\tilde{H}^G_*$, $t\tilde{H}^*_G$ で表す. すると, X の Tate ホモロジーは, $X \wedge \tilde{E}G$ の co-Borel ホモロジーと一致することがわかる.

$$t\tilde{H}^G_*(X;\pi) = [S^n, X \wedge t(k_G)]_G = [S^n \wedge EG_+, X \wedge \tilde{E}G \wedge k_G]_G = c\tilde{H}^G_*(X \wedge \tilde{E}G;\pi).$$

一方 X の Tate コホモロジーも, $X \wedge \tilde{E}G$ の co-Borel コホモロジーと一致することが示されている ([15, Proposition 2.6]).

$$t\tilde{H}^n_G(X;\pi) \cong c\tilde{H}^{n+1}_G(X \wedge \tilde{E}G;\pi)$$

[20]節の最初の k は古典的 Ω-スペクトラムに見える書き方をしておりそのように思っていて差し支えないが, ここからは [23] のような意味での現代的なスペクトラムの意味に思ってほしい. また, 後にでてくる種々の (コ) ホモロジーは $RO(G)$-graded で定義されるが, 簡単のため次数は全て整数の場合のみを考えることにする.

G を S^1 または Pin(2) とする. (A.1) より次の完全列が得られる:

$$\cdots \to c\tilde{H}_G^{*-1}(X;\pi) \to \tilde{H}_G^*(X;\pi) \to t\tilde{H}_G^*(X;\pi) \to c\tilde{H}_G^*(X;\pi) \to \cdots \tag{A.3}$$
$$\cdots \to \tilde{H}^G_{*-1}(X;\pi) \to c\tilde{H}^G_*(X;\pi) \to t\tilde{H}^G_*(X;\pi) \to \tilde{H}^G_{*-2}(X;\pi) \to \cdots \tag{A.4}$$

(Borel ホモロジー, co-Borel コホモロジーに次数のシフトがある.)

ここで $G = S^1$, $X = \mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{c})$ とすると, 完全系列 (A.4) は Monopole Floer, Heegaard Floer の次の系列と対応する [24]:

$$\cdots \to \widetilde{HM}_\bullet(Y) \to \widehat{HM}_\bullet(Y) \to \overline{HM}_\bullet(Y) \to \widetilde{HM}_\bullet(Y) \to \cdots \tag{A.5}$$
$$\cdots \to HF^+(Y) \to HF^-(Y) \to HF^\infty(Y) \to HF^+(Y) \to \cdots \tag{A.6}$$

注意 A.7. 以上のような説明だと (A.5), (A.6) は「難しい」完全系列のような印象を与えてしまうかもしれないが, 必ずしもそうではないと思われる. 実際, Monopole Floer の系列 (A.5) はわかりやすい有現次元のモデルを持つ. (以下 [21, I, 2] 参照.) P を有限次元閉リーマン多様体とし, S^1 が等長に作用しているとする. $Q = P^{S^1}$ を固定点集合とし $P \setminus Q$ への S^1 作用は自由であると仮定する. 商空間 $B = P/S^1$ は Q の像以外では滑らかな多様体である. B の Q に沿った特異点を real blow up で解消する. Q の法束を N とし $S(N)$ をその球面束とする. $P \setminus Q$ に境界 $S(N)$ を付けてコンパクト化したものを P^σ とすると, ここには S^1 が自由に作用する. B の real blow up B^σ を次のように定義する.

$$B^\sigma = P^\sigma/S^1.$$

このとき $\partial B^\sigma = S(N)/S^1$ で, これは複素射影空間をファイバーとする Q 上のファイバー束である. すると Monopole Floer の系列 (A.5) の有限次元のモデルは, 実は, 次の空間対の完全系列である:

$$\cdots \to H_*(\partial B^\sigma) \to H_*(B^\sigma) \to H_*(B^\sigma, \partial B^\sigma) \to \cdots$$

$H_*(\partial B^\sigma)$ に $\overline{HM}_\bullet(Y)$ が対応する. 実際の Monopole Floer 理論では ∂B^σ に相当するのは $b_1(Y) = 0$ ならば $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ とホモトピー同値な空間である. このとき U を次数 2 の生成元として $\overline{HM}_\bullet(Y) \cong \mathbb{Z}[U, U^{-1}]$ であり ([21, IX, §35]), 言ってみれば, これは $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ のホモロジーについて $\infty/2$ 次元のところを次数 0 とみなしたものと思えるだろう.

注意 A.8. $G = \mathrm{Pin}(2)$, $X = \mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{s})$ としたときの完全系列 (A.4) に対応する Monopole Floer ホモロジーの完全系列が F. Lin [27] で示されている.

参考文献

[1] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry: I*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77** (1975) , 43–69.

[2] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry: III*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **79** (1976), 71–99.

[3] M. F. Atiyah and G. B. Segal, *Equivariant K-theory and completion*, J. Differential Geometry, **3** (1969), 1–18.

[4] R. L. Cohen, J. D. S. Jones and G. B. Segal, *Floer's infinite dimensional Morse theory and homotopy theory*, The Floer memorial volume, Birkhäuser, Basel (1995), 297–325.

[5] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 38, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.

[6] C. Conley and R. Easton, *Isolated Invariant Sets and Isolating Blocks*, Trans. Amer. Math. Soc. **158**, No. 1 (1971), 35–61

[7] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differential Geom., **18** (1983), no. 2, 279–315.

[8] S. K. Donaldson, *The orientation of Yang-Mills moduli spaces and* 4*-manifold topology*, J. Differential Geom., **26** (1987), no. 3, 397–428.

[9] Andreas Floer, *A refinement of the Conley index and an application to the stability of hyperbolic invariant sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems **7** (1987), no. 1, 93–103.

[10] K. A. Froyshov, *The Seiberg-Witten equations and four-manifolds with boundary*, Math. Res. Lett., **3** (1996), no. 3, 373–390.

[11] K. A. Froyshov, *Equivariant aspects of Yang-Mills Floer theory*, Topology, **41** (2002), no. 3, 525–552.

[12] K. A. Froyshov, *Monopole Floer homology for rational homology* 3*-spheres*, Duke Math. J., **155** (2010), no. 3, 519–576.

[13] M. Furuta, *Monopole equation and the 11/8-conjecture*, Math. Res. Lett. **7** (2001), 279–291.

[14] M. Furuta and T.-J. Li, *Intersection forms of spin* 4*-manifolds with boundary*, preprint (2013).

[15] J. P. C. Greenlees and J. P. May, *Generalized Tate cohomology*, Mem. Amer. Math. Soc. **113** (1995), no. 543, viii+178.

[16] T. Khandhawit, *Twisted Manolescu-Floer spectra for Seiberg-Witten*, PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2013.

[17] T. Khandhawit, *On the stable Conley index in Hilbert spaces*, preprint, arXiv:math/1402.1665

[18] T. Khandhawit, *A new gauge slice for the relative Bauer-Furuta invariants*, Geom. Topol. **19** (2015), 1631–1655.

[19] T. Khandhawit, J. Lin and H. Sasahira, forthcoming.

[20] P. B. Kronheimer and C. Manolescu, *Periodic Floer pro-spectra from the Seiberg-Witten equations*, preprint, arXiv:math/0203243, v1 (2002), v2 (2003), v3 (2014).

[21] P. B. Kronheimer and T. Mrowka, Monopoles and three-manifolds. New Mathematical Monographs, 10. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[22] C. Kutluhan, Y.-J. Lee and C. H. Taubes, $HF = HM$ *I–V*, preprint, arXiv:1007.1979, 1008.1595, 1010.3456, 1107.2297, 1204.0115.

[23] L. G. Lewis Jr, J. P. May and M. Steinberger, *Equivariant stable homotopy theory*, Lecture note in mathematics, vol. 1213, Springer-Verlag (1986).

[24] Tye Lidman and Ciprian Manolescu, *The equivalence of two Seiberg-Witten Floer homologies*, preprint, arXiv:1603.00582

[25] Tye Lidman and Ciprian Manolescu, *Floer homology and covering spaces*, preprint, arXiv:1603.00584

[26] J. Lin, Pin(2)*-equivariant KO-theory and intersection forms of spin* 4*-manifolds*, Algeb. Geom. Topol. **15** (2015) 863–902.

[27] F. Lin, *A Morse-Bott approach to monopole Floer homology and the Triangulation conjecture*, preprint, arXiv:1404.4561

[28] F. Lin, *The surgery exact triangle in* Pin(2)*-monopole Floer homology*, preprint, arXiv:1504.01993

[29] M. Lipyanskiy, *A semi-infinite cycle construction of Floer homology*, PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2008.

[30] C. Manolescu, *Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with* $b_1 = 0$, Geom. Topol. **7** (2003), 889–932.

[31] C. Manolescu, *A gluing theorem for the relative Bauer-Furuta invariants*, J. Differential Geom. **76**, no. 1 (2007), 117–153.

[32] C. Manolescu, *The Conley index, gauge theory, and triangulations*, J. Fixed Point Theory Appl. **13** (2013), 431–457.

[33] C. Manolescu, *On the intersection form of spin four-manifolds with boundary*, Math. Ann. **359** (2014), 695–728.

[34] C. Manolescu, *Errata to the article "Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with* $b_1 = 0$" , `http://www.math.ucla.edu/~cm/swf_errata.pdf`.

[35] C. Manolescu, *Floer theory and its topological applications*, Japanese J. Math. **10** (2015), 105–133

[36] C. Manolescu, Pin(2)*-Equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the Triangulation Conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), 147–176

[37] Y. Matsumoto, *On the bounding genus of homology* 3*-spheres*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **29** (1982), no. 2, 287–318.

[38] T. Matumoto, *Equivariant cohomology theories on G-CW complexes*, Osaka J. Math. **10**, Number 1 (1973), 51–68.

[39] T. Mrowka, P. Ozsváth and B. Yu, *Seiberg-Witten monopoles on Seifert fibered spaces*, Comm. Anal. Geom. **5**(4) (1997) 685–791.

[40] N. Nakamura, *Manolescu's Seiberg-Witten Floer homotopy type*, `http://www.osaka-med.ac.jp/deps/mat/nakamura/papers/swfh-hnd.pdf`

[41] P. S. Ozsváth and Z. Szabó, *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary*, Adv. Math., **173** (2003), no. 2, 179–261.

[42] Artur M. Pruszko, *The Conley index for flows preserving generalized symmetries*, Conley index theory (Warsaw, 1997), Banach Center Publ., vol. 47, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1999, pp. 193–217.

[43] D. Salamon, *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets* Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), 1–41.

[44] H. Sasahira, *Gluing formula for the stable cohomotopy version of Seiberg-Witten invariants along* 3*-manifolds with* $b_1 > 0$, preprint, arXiv:1408.2623.

[45] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Volume 258 (1994), Springer.

[46] M. Stoffregen, Pin(2)*-equivariant Seiberg-Witten Floer homology of Seifert fibrations*, preprint, arXiv:1505.03234.

[47] M. Stoffregen, *Manolescu Invariants of Connected Sums*, preprint, arXiv:1510.01286