山辺不変量と $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式

中村 信裕 (大阪医科大学)*

2016 年 7 月 19 日

1 Introduction

山辺不変量は, リーマン計量の全スカラー曲率に関する変分問題から生ずる滑らかな多様体の微分位相不変量である. $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式は, Spin^c 構造の複素共役から生ずる「捩れた」Seiberg-Witten 方程式である. 本講演では, ある新しい系列の閉 4 次元多様体の山辺不変量が $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式を用いて計算されることを紹介したい. 尚, 本講演は, 石田政司氏 (東北大学), 松尾信一郎氏 (名古屋大学) との共同研究 [6] に基づく.

山辺不変量の復習からはじめよう. X を $\dim X = m \geq 3$ である滑らかな有向閉連結多様体とし, $\mathcal{M}(X)$ を X 上の滑らかなリーマン計量全体のなす空間とする. 各計量 $g \in \mathcal{M}(X)$ について, スカラー曲率を s_g と表し, 体積形式を $d\mu_g$ と表す. このとき正規化された Einstein-Hilbert 汎関数 $E_X\colon \mathcal{M}(X) \to \mathbb{R}$ が次のように定義される:

$$E_X\colon g \mapsto \frac{\int_X s_g\, d\mu_g}{\left(\int_X d\mu_g\right)^{\frac{m-2}{m}}}.$$

古典的な山辺の問題は, 与えられた共形類 C の中で, 正規化された Einstein-Hilbert 汎関数を最小にする計量 $\check{g}$ を見つけることである: $E_X(\check{g}) = \inf_{g\in C} E_X(g)$. 最小値を与える計量 $\check{g}$ を**山辺計量**と呼び, 共形不変量 $\mathcal{Y}(X,C) := E_X(\check{g})$ を**山辺定数**と呼ぶ. **山辺不変量** $\mathcal{Y}(X)$ は X 上の全ての共形類についての $\mathcal{Y}(X,C)$ の上限として定義される微分位相不変量である:

$$\mathcal{Y}(X) := \sup_C \mathcal{Y}(X,C) = \sup_C \inf_g \frac{\int_X s_g\, d\mu_g}{\left(\int_X d\mu_g\right)^{\frac{m-2}{m}}}.$$

この不変量は σ-constant と呼ばれることもある [10, 21]. (山辺不変量の一般論については [11, 1] を参照されたい.)

山辺不変量の値の決定は基本問題の一つである. 4 次元においては, Seiberg-Witten 理論と LeBrun の曲率評価がこの問題についての決定的役割を果たす. LeBrun は通常の Seiberg-Witten 方程式を用いて大半の代数曲面の山辺不変量を決定した [13, 15]. 特に, コンパクト・ケーラー曲面が一般型である必要十分条件は山辺不変量が負であることを証明している. さらに LeBrun は摂動した Seiberg-Witten 方程式を用いて $\mathcal{Y}(\mathbb{CP}^2) = 12\sqrt{2}\pi$ を証明している [14]. 一方 Bauer-Furuta [2] の安定コホモトピー Seiberg-Witten 不変量, 笹平 [20] のスピン・ボルディズム Seiberg-Witten 不変量を用いると, コンパクト・ケーラー曲面のいくつかの連結和の山辺不変量が計算できる [5, 20, 7, 8]. 本稿では前述の $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式を用いて定義される $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量 [18] を

*Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 25400096.

用いて新しい系列の 4 次元多様体の山辺不変量を計算する. $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量は, 通常の Seiberg-Witten 不変量, スピン・ボルディズム不変量, 安定コホモトピー不変量が全て消えていても, 非自明になることがある. このことが新しい系列の多様体の山辺不変量の計算を可能にする.

主結果を述べる. 以下で, $\chi(X)$, $\tau(X)$ はそれぞれ多様体 X のオイラー数と符号数を表し, $mX := X\#\cdots\#X$ は m 個の連結和を表す.

定理 1.1 ([6])**.** M をコンパクト連結極小ケーラー曲面で $b_+(M)\geq 2$, $c_1^2(M)=2\chi(M)+3\tau(M)\geq 0$ を満たすものとする. N を有向連結閉 4 次元多様体で $b_+(N)=0$, $\mathcal{Y}(N)\geq 0$ を満たすものとする. Z を以下の形の 4 次元多様体の任意個の連結和とする:

(1) $S^2\times\Sigma$. ここで Σ は種数が正のコンパクトリーマン面. または,

(2) $S^1\times Y$. ここで Y は有向閉 3 次元多様体.

このとき連結和 $M\#N\#Z$ の山辺不変量は $-4\pi\sqrt{2c_1^2(M)}$ である.

定理 1.2 ([6])**.** M をエンリケス曲面とする. N, Z を定理 1.1 の仮定を満たす多様体とする. このとき $M\#N\#Z$ の山辺不変量は 0 である.

定理 1.3 ([6])**.** M をエンリケス曲面とする. N を有向連結閉 4 次元多様体で $b_+(N)=0$, $\mathcal{Y}(N)\geq 0$ を満たすものとする. 2 以上の任意の整数 m に対し, $mM\#N$ の山辺不変量は 0 である.

前述のように, これらの定理の証明において, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量の非自明性がキーになる. 一方, 上記の定理の多様体について, 多くの場合, 通常の Seiberg-Witten 不変量, スピン・ボルディズム不変量, 安定コホモトピー不変量は消滅する.

これらの定理の証明は平行に進むが, 以下, 本稿では定理 1.1 の証明の概要を解説する.

2 証明の前半

M を有向閉連結 m 次元多様体 $(m\geq 3)$ とするとき, $\mathcal{I}_s(M)$ を次のように定義する:

$$\mathcal{I}_s(M)=\inf_{g\in\mathcal{M}(M)}\int_M |s_g|^{\frac{m}{2}}\,d\mu_g$$

以下の事実が知られている.

定理 2.1 (小林 [10], Besson-Courtois-Gallot[3])**.**

$$\mathcal{I}_s(M)=\begin{cases}0 & \text{if}\quad \mathcal{Y}(M)\geq 0\\ |\mathcal{Y}(M)|^{\frac{m}{2}} & \text{if}\quad \mathcal{Y}(M)\leq 0\end{cases}$$

定理 2.2 (小林 [9])**.**

$$\mathcal{I}_s(M\#N)\leq\mathcal{I}_s(M)+\mathcal{I}_s(M).$$

コンパクト連結極小ケーラー曲面の山辺不変量は LeBrun によって計算されている.

定理 2.3 (LeBrun[13, 15])**.** M をコンパクト連結極小ケーラー曲面で $b_+(M)\geq 2$, $c_1^2(M)=2\chi(M)+3\tau(M)\geq 0$ を満たすとすると

$$\mathcal{Y}(M)=-4\pi\sqrt{2c_1^2(M)}$$

定理 1.1 の $M\#N\#Z$ について Z の連結和の成分への分解を $Z = Z_1\#\cdots\#Z_k$ と表すと, 仮定より $\mathcal{Y}(N) \geq 0$, $\mathcal{Y}(Z_i) \geq 0$ $(i = 1, \dots, k)$ である. もし $\mathcal{Y}(M\#N\#Z) \leq 0$ ならば

$$|\mathcal{Y}(M\#N\#Z)|^2 = \mathcal{I}_s(M\#N\#Z) \leq \mathcal{I}_s(M) + \mathcal{I}_s(N) + \mathcal{I}_s(Z_1) + \cdots + \mathcal{I}_s(Z_k) = 32\pi^2 c_1^2(M).$$

したがって, 次を示せば定理 1.1 が示される.

定理 2.4. 定理 1.1 の $M\#N\#Z$ について

$$\mathcal{Y}(M\#N\#Z) \leq 0 \text{ かつ } |\mathcal{Y}(M\#N\#Z)|^2 \geq 32\pi^2 c_1^2(M).$$

次節以降で, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式によるこの定理の証明について解説する.

3 $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式と LeBrun の曲率評価

本節では $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式の一般論と, 主結果の証明のキーとなる LeBrun の曲率評価について解説する. $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式の一般論については [17, 18] を参照されたい.

3.1 Spin^{c-} 構造

$\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式は Spin^{c-} 構造という Spin^c 構造の変種の上に定義される. Spin^c 構造は群 $\mathrm{Spin}^c(n) = \mathrm{Spin}(n) \times_{\{\pm1\}} \mathrm{U}(1)$ を用いて定義されるが, Spin^{c-} 構造は $\mathrm{Spin}^c(n)$ の定義の中の $\mathrm{U}(1)$ を $\mathrm{Pin}^-(2)$ に置き換えて定義される構造である. 本節ではこの Spin^{c-} 構造について解説をする.

$\mathrm{Pin}^-(2)$ を, 四元数の単元たちのなす群 $\mathrm{Sp}(1)$ の中で, $\mathrm{U}(1)$ と j とのよって生成される部分群とする. すなわち $\mathrm{Pin}^-(2) = \mathrm{U}(1) \cup j\,\mathrm{U}(1) \subset \mathrm{Sp}(1) \subset \mathbb{H}$ である. すると 2 対 1 の準同型写像 $\varphi_0\colon \mathrm{Pin}^-(2) \to \mathrm{O}(2)$ で, $z \in \mathrm{U}(1) \subset \mathrm{Pin}^-(2)$ を $z^2 \in \mathrm{U}(1) \subset \mathrm{O}(2)$ に写し, j を鏡映

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

に写すものがある.

群 $\mathrm{Spin}^{c-}(n)$ を次のように定義する: $\mathrm{Spin}^{c-}(n) = \mathrm{Spin}(n) \times_{\{\pm1\}} \mathrm{Pin}^-(2)$.

すると次のことが成り立つ.

- $\mathrm{Spin}^{c-}(n)/\mathrm{Pin}^-(2) = \mathrm{SO}(n)$, $\quad \mathrm{Spin}^{c-}(n)/\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{O}(2)$.
- $\mathrm{Spin}^{c-}(n)$ の単位元成分は $\mathrm{Spin}^c(n)$ で, $\mathrm{Spin}^{c-}(n)/\mathrm{Spin}^c(n) = \{\pm1\}$.

X を有向連結閉 n 次元多様体とし, X 上の非分岐二重被覆 $\tilde{X} \to X$ が与えられているとする. $\tilde{X}$ に同伴する局所系を $\ell = \tilde{X} \times_{\{\pm1\}} \mathbb{Z}$ とする. X にリーマン計量を固定し, $\mathrm{SO}(n)$ 接枠束を $Fr(X)$ と表す.

定義 3.1 (古田 [4])**.** $\tilde{X} \to X$ 上の Spin^{c-} 構造とは次の三つ組 $\mathfrak{s} = (P, \sigma, \tau)$ である:

- X 上の $\mathrm{Spin}^{c-}(n)$ 束 P.
- $\{\pm1\}$ 束の間の同型写像 $\sigma\colon P/\mathrm{Spin}^c(n) \xrightarrow{\cong} \tilde{X}$.

- $\mathrm{SO}(n)$ 束の間の同型写像 $\tau\colon P/\operatorname{Pin}^-(2) \xrightarrow{\cong} Fr(X)$.

$E = P/\operatorname{Spin}(n)$ を特性 O(2) 束と呼ぶ.[1] E の同伴 $\mathbb{R}^2$ 束を $E_{\mathbb{R}}$ とすると $\det E_{\mathbb{R}} = \ell \otimes \mathbb{R}$ が成り立ち, E の ℓ 係数 Euler 類 $\tilde{c}_1(E) \in H^2(X;\ell)$ が定まる.[2]

以下 $n = \dim X = 4$ と仮定する. $\tilde{X} \to X$ 上の Spin^{c-} 構造 $\mathfrak{s} = (P, \sigma, \tau)$ は $\tilde{X}$ 上の $\mathrm{Spin}^c(4)$ 束 $P \to P/\mathrm{Spin}^c(4) \cong \tilde{X}$ を誘導し, これは $\tilde{X}$ 上の Spin^c 構造を定めることがわかる. この Spin^c 構造を $\tilde{\mathfrak{s}}$ で表す. $\tilde{\mathfrak{s}}$ のスピノル束 $\tilde{S}^{\pm} \to \tilde{X}$ は, $\mathbb{H}_{\pm}$ を $\mathrm{Spin}^c(4)$ のスピノル表現として

$$\tilde{S}^{\pm} = P \times_{\mathrm{Spin}^c(4)} \mathbb{H}_{\pm}$$

によって与えられる. $\tilde{X}$ の被覆変換を $\iota\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ ($\iota^2 = 1$) とすると,

$$J = [1, j] \in \mathrm{Spin}^c(4) \times_{\{\pm 1\}} \operatorname{Pin}^-(2) = \mathrm{Spin}^{c-}(4)$$

の P への作用は ι を cover する. $J^2 = -1$ であり J の位数は 4 であることに注意. スピノル束 $\tilde{S}^{\pm} = P \times_{\mathrm{Spin}^c(4)} \mathbb{H}_{\pm}$ へ $[J, j]$ のかけ算から誘導される作用 I を考えると, これは**反線形**な束写像で ι を cover し, $I^2 = 1$ を満たす. すると Spin^{c-} 構造 $\mathfrak{s}$ のスピノル束 $S^{\pm}$ は

$$S^{\pm} = \tilde{S}^{\pm}/I$$

によって与えられることがわかる.[3] $S^{\pm}$ は反線形な対合による商束なので複素構造は入っていない. 強いて言えば「局所系 ℓ に沿って捩れた複素構造」が入る. これに伴い局所系 ℓ に沿って捩れた Clifford 積が定義される:

$$\rho\colon T^*X \otimes_{\mathbb{R}} (\ell \otimes i\mathbb{R}) \to \operatorname{End}(S^+ \oplus S^-).$$

この Clifford 積を用いると, E 上の O(2) 接続 A と Levi-Civita 接続から Dirac 作用素

$$D_A\colon \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-)$$

が定義される. この Spin^{c-}-Dirac 作用素に対して, Weitzenböck formula が成り立つ:

$$D_A^2 \Phi = \nabla_A^* \nabla_A \Phi + \frac{s_g}{4}\Phi + \frac{F_A}{2}\Phi. \tag{3.2}$$

注意 3.3. $\pi\colon \tilde{X} \to X$ を射影としたとき, O(2) 束 E の引き戻し π^*E は, $\tilde{X}$ 上の Spin^c 構造 $\tilde{\mathfrak{s}}$ の deteminant line bundle L への reduction を持つ. E 上の O(2) 接続 A の引き戻し π^*A は reduction によって L の U(1) 接続 $\tilde{A}$ を誘導する. すると $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{s}})$ 上の Dirac 作用素 $D_{\tilde{A}}$ は, **複素構造を忘れ実の作用素と思うと** I 同変になる. さらに, もともとの $(X, \mathfrak{s})$ の Dirac 作用素 D_A は, $D_{\tilde{A}}$ の I 不変部分と同一視される.

標語的に言うなら $\tilde{X} \to X$ 上の $\operatorname{Pin}^-(2)$ モノポール理論は, 二重被覆 $\tilde{X}$ 上の Seiberg-Witten 理論の I 不変部分と理解できる.

[1] E は Spin^c 構造における determinant line bundle に当たるものである.

[2] Euler 類が定まるには E の ℓ 係数の向きが必要だが, これはすぐ後に説明する $\tilde{X}$ 上に誘導される Spin^c 構造から標準的に定まる ([18, §2]).

[3] $S^{\pm}$ は X 上の $\mathrm{Spin}^{c-}(4)$ 束 $P \to X$ に同伴するベクトル束として直接定義することもできる.

3.2 $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式

$\mathcal{A}$ を E 上の $\mathrm{O}(2)$ 接続全体の空間とし, $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \Gamma(S^+)$ とする. $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式は $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ に対する次の形の方程式である:

$$\begin{cases} D_A \Phi = 0, \\ \quad F_A^+ = q(\Phi). \end{cases} \tag{3.4}$$

2 番目の式で, $q(\Phi)$ は $q(\Phi) = \Phi \otimes \Phi^* - \frac{1}{2}|\Phi|^2 \,\mathrm{id}$ によって定義される $\Gamma(\mathrm{End}(S^+))$ の元であり, 曲率の自己双対部分 $F_A^+ \in \Omega^+(\ell \otimes i\mathbb{R})$ を Clifford 積により $\Gamma(\mathrm{End}(S^+))$ の元とみなしている.

$\mathcal{C}$ にはゲージ変換群 $\mathcal{G} = \Gamma(\tilde{X} \times_{\{\pm 1\}} \mathrm{U}(1))$ が作用し, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式は $\mathcal{G}$ 同変である. $\mathcal{G}$ 作用は $\mathcal{C}^* := \mathcal{A} \times (\Gamma(S^+) \setminus \{0\})$ 上では自由である. 一方, 作用が自由でない $\mathcal{A} \times \{0\}$ の元の固定部分群は $\{\pm 1\}$ である. $(A, \Phi) \in \mathcal{C}^*$ であるような解を**既約解**と呼び, 既約解でない解を**可約解**と呼ぶ. 可約解は $(A, 0)$ の形の解である. 解のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ は解空間を $\mathcal{G}$ 作用で割った商空間として定義される. $\mathcal{M}$ が可約解を含むとそこは商特異点となる.

さて Weitzenböck formula (3.2) から $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式の解について次の評価が得られる.

命題 3.5. (A, Φ) を $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式の解とすると, $|\Phi|$ が最大値を取る点 x で

$$|\Phi(x)|^2 \leq \max(0, -s_g(x)).$$

証明. (A, Φ) を解とすると, Weitzenböck formula (3.2) から

$$0 = |D_A \Phi|^2 = \frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 + |\nabla_A \Phi|^2 + \frac{s_g}{4}|\Phi|^2 + \left\langle \frac{F_A^+}{2}\Phi, \Phi \right\rangle.$$

$F_A^+ = q(\Phi)$ を代入し $\langle q(\Phi)\Phi, \Phi\rangle = |\Phi|^4/2$ を用いると, $|\Phi|^2$ が最大値を取る点で

$$0 \leq \Delta|\Phi|^2 \leq -\frac{s_g}{2}|\Phi|^2 - \frac{1}{2}|\Phi|^4. \tag{3.6}$$

□

系 3.7. X に正スカラー曲率を持つ計量を入れたならば, 既約解 $(\Phi \not\equiv 0)$ は存在しない.

注意 3.8. 命題 3.5, 系 3.7 に対応する事実は通常の Seiberg-Witten 方程式についても成り立っていた.

注意 3.9. $\tilde{X} \to X$ が自明な二重被覆のとき, $\tilde{X} \to X$ 上の Spin^{c-} 構造は X 上の Spin^c 構造への標準的な reduction を持つ. このとき, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式は, 標準的な reduction の上の通常の Seiberg-Witten 方程式と同一視される.

3.3 $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量

$\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量は解のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ の ambient space $\mathcal{B}^* := \mathcal{C}^*/\mathcal{G}$ 内での交叉理論を通じて定義される. そのために $\mathcal{M}$ が可約解を含まず, 横断正則性が満たされ基本類を持ってほしい. これらのことが成り立つようにするために, 一般に $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール方程式を摂動する

必要がある. 簡便でかつ目的のために十分な摂動は, 曲率についての方程式の方に $\ell \otimes i\mathbb{R}$ 係数の自己双対 2 形式 μ の項を加える方法である:

$$\begin{cases} D_A\Phi = 0, \\ F_A^+ = q(\Phi) + \mu. \end{cases} \tag{3.10}$$

可約解について考えたい. 可約解では $\Phi \equiv 0$ であるので, 方程式は次のように簡単になる:

$$F_A^+ = \mu.$$

b_+^ℓ を $\ell \otimes i\mathbb{R}$ 係数の自己双対調和 2 形式のなす空間の次元とすると, 調和積分論より次がわかる

命題 3.11. (1) $b_+^\ell = 0$ のとき, 任意の計量と任意の μ に対し, (3.10) は可約解を持つ.
(2) $b_+^\ell \geq 1$ のとき, $\Omega^+(\ell \otimes i\mathbb{R})$ の中に余次元 b_+^ℓ の部分空間 $\mathcal{W}$ が存在し, (3.10) が可約解を持つ必要十分条件は $\mu \in \mathcal{W}$ である.

したがって $b_+^\ell \geq 1$ のとき, μ を $\mu \notin \mathcal{W}$ となるよう選べば解のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ は可約解を含まない. さらに μ を generic に取れば, 横断正則性が満たされるようにでき, $\mathcal{M}$ は有限次元の多様体になる. また Seiberg-Witten のときと同様に $\mathcal{M}$ はコンパクトである.

$\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール理論が通常の Seiberg-Witten 理論と異なる点の一つは, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポールではモジュライ空間 $\mathcal{M}$ が必ずしも向き付け可能でないことである. すると $\mathcal{M}$ の基本類が一般的に定義されるのは $\mathbb{Z}/2$ 係数なので, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量は一般に $\mathbb{Z}/2$ に値をとる不変量として次のように定義される:

$$\mathrm{SW}^{\mathrm{Pin}}(X,\mathfrak{s})\colon H^*(\mathcal{B}^*;\mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2, \quad \alpha \mapsto \langle \alpha, [\mathcal{M}] \rangle.$$

$\mathrm{SW}^{\mathrm{Pin}}(X,\mathfrak{s})$ は, $b_+^\ell \geq 2$ のとき, 計量や摂動など構成に用いた諸々のものの選択によらず, 微分位相不変量となる. $b_+^\ell = 1$ のときは壁越えの現象が起きる.

注意 3.12. ambient space $\mathcal{B}^* = \mathcal{C}^*/\mathcal{G}$ は $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ と b_1^ℓ 次元のトーラスの直積のホモトピー型を持つ. またモジュライ空間 $\mathcal{M}$ が向き付け可能になることもあり, $\mathbb{Z}$ に値を取る不変量が定義される場合もある.

不変量が非自明のときには, 次のことがわかる.

命題 3.13. $b_+^\ell \geq 2$ のとき $\mathrm{SW}^{\mathrm{Pin}}(X,\mathfrak{s}) \neq 0$ ならば, X の任意の計量に対して既約解が存在する.

そこで次の定義をする.

定義 3.14. X を有向連結閉 n 次元多様体とし, X 上の非分岐二重被覆 $\tilde{X} \to X$ が与えられているとする. $\tilde{X}$ に同伴する局所系を $\ell = \tilde{X} \times_{\{\pm 1\}} \mathbb{Z}$ としたとき, $b_+^\ell \geq 2$ だったと仮定する. このとき, ℓ 係数コホモロジー類 $\mathfrak{a} \in H^2(X;\ell)/\mathrm{Tor}$ が $\mathrm{Pin}^-(2)$-basic class であるとは, $\tilde{X} \to X$ 上の Spin^{c-} 構造 $\mathfrak{s}$ で以下の条件を満たすものである:

(1) modulo torsion で $\tilde{c}_1(\mathfrak{s}) = \mathfrak{a}$.

(2) $\mathfrak{s}$ の $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量は非自明である.

系 3.7 と命題 3.13 より次が得られる.

命題 3.15. X が $\mathrm{Pin}^-(2)$-basic class を持つならば, $\mathcal{Y}(X) \leq 0$.

3.4 LeBrun の曲率評価

$\mathcal{I}_s(X)$ の下からの評価のキーとなるのは LeBrun による曲率評価の $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール版である.

補題 3.16 (*Cf.* LeBrun[12, 16])**.** $a \in H^2(X; l \otimes \mathbb{R})$ を $\mathrm{Pin}^-(2)$-basic class とする. a を計量 g についての調和形式と同一視したときに, a の g-selfdual part を a^{+_g} と表す. このとき X の任意の計量 g に対し,

$$\int_X s_g^2 d\mu_g \geq 32\pi^2 (a^{+_g})^2.$$

証明. (A, Φ) を (3.4) の解とする. (3.6) を積分し, Cauchy-Schwarz の不等式を用いると,

$$\int_X |\Phi|^4 d\mu_g \leq \int_X (-s_g)|\Phi|^2 d\mu_g \leq \left(\int_X s_g^2 dv_g\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |\Phi|^4 d\mu_g\right)^{\frac{1}{2}}$$

$F_A^+ = q(\Phi)$ を用いると,

$$\int_X s_g^2 d\mu_g \geq \int_X |\Phi|^4 d\mu_g = 8\int |F_A^+| d\mu_g = 32\pi^2 (a^{+_g})^2.$$

□

系 3.17. $\mathrm{Pin}^-(2)$-basic class a と任意の計量 g に対して,

$$\mathcal{I}_s(X) \geq 32\pi^2 (a^{+_g})^2 \geq 32\pi^2 a^2.$$

3.5 非消滅定理

証明の最後の材料は, $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量の非消滅定理である.

定理 3.18 ([18],[6])**.** $X = M\#N\#Z$ を定理 1.1 の多様体とする. X 上の局所系 ℓ と $\mathrm{Pin}^-(2)$-basic class a が存在し, 任意の計量 g に対して,

$$(a^{+_g})^2 \geq c_1(M)^2.$$

注意 3.19. 定理 1.2, 定理 1.3 のそれぞれの多様体についても, それぞれ $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量の非消滅定理が成り立つ.

定理 2.4 の証明を完成させることで, 定理 1.1 の証明を完成させる.

定理 2.4 の証明. 定理 3.18 より X には $\mathrm{Pin}^-(2)$-basic class a が存在し命題 3.15 より $\mathcal{Y}(X) \leq 0$ である. またこのとき定理 3.18 と系 3.17 より

$$|\mathcal{Y}(X)|^2 = \mathcal{I}_s(X) \geq 32\pi^2 c_1(M)^2.$$

□

4　非消滅定理について

この節では, 定理 1.1 の $X = M\#N\#Z$ について Donaldson, Seiberg-Witten, 安定コホモトピー不変量は消えるのに, なぜ $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量は消えないのかについて解説したい. まず次の事実について説明する.

命題 4.1. 定理 1.1 の $X = M\#N\#Z$ について, Z が次のような連結和成分を一つ以上含むとする:

- $S^2 \times \Sigma$, Σ の種数は正.
- $S^1 \times Y$, $b_1(Y) \geq 1$, $\mathcal{Y}(Y) > 0$.

このとき X の Seiberg-Witten 不変量, 安定コホモトピー Seiberg-Witten 不変量は 0 である.

命題の条件をみたす Z の成分を Z' とすると, 次を満たす:

(1) $b_+(Z') \geq 1$,

(2) Z' は正スカラー曲率計量を許容する.

X を Z' とそれ以外の成分 X' に分解する: $X = X'\#Z'$. ラフに言って, 連結和上の Seiberg-Witten 方程式のモジュライ空間 $\mathcal{M}(X)$ は, 解の貼り合わせの議論によりそれぞれの成分のモジュライ空間 $\mathcal{M}(X')$, $\mathcal{M}(Z')$ の大体直積のようなものとみなすことができる. より正確には based なゲージ変換群を $\mathcal{G}_0$ とし, 解空間を $\mathcal{G}_0$ で割った商空間を $\tilde{\mathcal{M}}$ で表すとき, $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0 = \mathrm{U}(1)$ なので $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}/\,\mathrm{U}(1)$ が成り立つが, 連結和の neck を長く伸ばした計量について次のような同一視ができる:

$$\mathcal{M}(X) \cong (\tilde{\mathcal{M}}(X') \times \tilde{\mathcal{M}}(Z'))/\,\mathrm{U}(1).$$

ここで, 右辺は $\tilde{\mathcal{M}}(X')$ と $\tilde{\mathcal{M}}(Z')$ の直積を対角作用で割った空間である. Z' に正スカラー曲率計量を入れると $\tilde{\mathcal{M}}(Z')$ は既約解を含まなくなり (系 3.7 参照), $b_+(Z') \geq 1$ なので方程式をわずかに摂動すれば可約解もなくせる. 結果として $\tilde{\mathcal{M}}(Z') = \emptyset$ となり, $\mathcal{M}(X) = \emptyset$ が示される.

以上の議論は上の (1)(2) の仮定を満たす成分を含めば成り立つ.[4] しかし (2) が成り立っていても (1) が満たされない, すなわち $b_+ = 0$ ならば事情は異なる. 特に, 命題 3.11(1) と同様, 次が成り立つ:

命題 4.2. N が $b_+(N) = 0$ を満たすなら, N 上の任意の計量について Seiberg-Witten 方程式は可約解を持つ.

これにより, 例えば次のことが示される.

命題 4.3 (*Cf.* [19])**.** 定理 1.1 の M, N に対し, $M\#N$ の Seiberg-Witten 不変量は非自明である.

$X = M\#N\#Z$ の $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量の非自明性は, 後者の議論と並行に示される. 実際, Z 上には $b_+^\ell = 0$ となる局所系 ℓ が存在する. すると命題 3.11(1) より, モジュライ空間が可約解を含む. $M\#N$ 上に自明な局所系を考えると, 注意 3.9 と命題 4.3 から $M\#N$ の $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量が非自明であることがわかる. これらの事実と貼り合わせの議論により, $M\#N\#Z$ の $\mathrm{Pin}^-(2)$ モノポール不変量の非自明性 (定理 3.18) が得られる.

---

[4]実際は (1) の仮定だけで $X = M\#N\#Z$ の Seiberg-Witten 不変量も Donaldson 不変量も 0 になってしまう. 一方安定コホモトピー不変量やボルディズム不変量は (1) の仮定だけでは 0 にならない例がある.

参考文献

[1] 芥川和雄, 山辺不変量, 数学 **66**, (2014), 31–60.

[2] S. Bauer and M. Furuta, *Stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants: I*, Invent. Math. **155** (2004) 1–19.

[3] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot, *Volume et entropie minimale des espaces localement symétriques*, Inv. Math., **103** (1991), 417–445.

[4] 古田幹雄, 「SPIN-C STRUCTURE の拡張」(インフォーマルなノート, 2008.11.25).

[5] M. Ishida and C. LeBrun, *Curvature, connected sums, and Seiberg-Witten theory*, Comm. An. Geom. **11** (2003) 809–836.

[6] M. Ishida, S, Matsuo and N. Nakamura, *Yamabe Invariants and the* $\mathrm{Pin}^{-}(2)$*-monopole Equations* preprint, math.arXiv:1505.05948

[7] M. Ishida and H. Sasahira, *Stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants of connected sums of four-manifolds with positive first Betti number, I: non-vanishing theorem*, to appear in International Journal of Mathematics. DOI: 10.1142/S0129167X15410049.

[8] M. Ishida and H. Sasahira, *Stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants of connected sums of four-manifolds with positive first Betti number, II: applications*, submitted.

[9] O. Kobayashi, *Scalar curvature of a metric of unit volume*, Math. Ann., **279** (1987), 253–265.

[10] 小林治, 山辺の問題について, Seminar on Mathematical Sciences, **16** Dept. Math. Keio Univ., 1990.

[11] 小林治・芥川和雄・井関裕靖, 山辺の問題, 数学メモワール 第 7 巻, 日本数学会, 2013.

[12] C. LeBrun, *Polarized* 4*-manifolds, extremal Kähler metrics, and Seiberg-Witten theory*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 653–662.

[13] C. LeBrun, *Four-manifolds without Einstein metrics*, Math. Res. Lett. **3** (1996), 133–147.

[14] C. LeBrun, *Yamabe constants and the perturbed Seiberg-Witten equations*, Comm. Anal. Geom. **5** (1997), 535–553.

[15] C. LeBrun, *Kodaira dimension and the Yamabe problem*, Comm. An. Geom. **7** (1999) 133–156.

[16] C. LeBrun, *Four-manifolds, curvature bounds, and convex geometry*, Riemannian topology and geometric structures on manifolds, 119–152, Progr. Math., 271, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2009.

[17] N. Nakamura, $\mathrm{Pin}^{-}(2)$*-monopole equations and intersection forms with local coefficients of* 4*-manifolds*, Math. Ann. **357** (2013), 915–939.

[18] N. Nakamura, $\mathrm{Pin}^{-}(2)$-*monopole invariants*, J. Differential Geom. **101**, Number 3 (2015), 507–549,

[19] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Higher Type Adjunction Inequalities in Seiberg-Witten Theory*, J. Differential Geom. **55**, Number 3 (2000), 385–440.

[20] H. Sasahira, *Spin structures on Seiberg-Witten moduli spaces*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006), 347–363.

[21] R. Schoen, *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics*, Topics in calculus of variations (Montecatini Terme, 1987), Lecture Notes in Math., **1365**, 120–154, Springer, Berlin, 1989.

[22] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka. Math. J. **12**, (1960), 21–37