BAUER-FURUTA INVARIANTS AND A NON-SMOOTHABLE INVOLUTION ON $K3\#K3$

東京大学数理科学研究科 COE 研究員 中村 信裕

1. 序

筆者は X. Liu 氏との共同研究 [14, 15] において、$K3$ を始めとする楕円曲面上に、特定の微分構造に対して滑らかになれない局所線型な巡回群の作用を構成した。例えば次のことを示した。

定理 1.1 ([14, 15])**.** $K3$ 曲面上の局所線型な巡回群(位数は $3, 5, 7$) の作用で、標準的なものを含む無限個の微分構造に対して滑らかになれないものが存在する。

このことの証明は、二つのステップからなっていた。

(1) 滑らかな作用が満たすべき拘束条件を与える。
(2) 局所線型作用であって、もし滑らかなら上記拘束条件を破ることになるものを具体的に構成する。

(2) のために、Edmonds-Ewing による局所線型作用の実現定理 [6] が用いられた。

(1) にはゲージ理論が用いられた。実際、F. Fang [7] によって得られ、筆者 [16] によって拡張された $\mathbb{Z}_p$ 作用下における Seiberg-Witten 不変量 (以下、SW 不変量) の mod p 消滅定理と、楕円曲面の SW 不変量の具体的な値が用いられた。より詳しく言うなら、mod p 消滅定理は「ある条件が満たされるなら、SW 不変量が p の倍数である」という形をとっている。したがって、もし SW 不変量が p で割り切れなければ滑らかな作用に対する制約が得られることになる。

しかしながら、 mod p 消滅定理によるこの方法は、SW 不変量が 0 である場合には使うことができない。

一方で、SW 不変量の安定コホモトピー版が Bauer-Furuta[4] によって定義されており、これは通常の SW 不変量の真の精密化になっていることが知られている。例えば、$K3$ の幾つかの連結和に対して、通常の SW 不変量は 0 であるが Bauer-Furuta の不変量は 0 でないことが知られている [2, 10]。

では、mod p 消滅定理の Bauer-Furuta 不変量版は言えるだろうか？言えるとしたら、それを用いて通常の SW 不変量が 0 であるような多様体の上に滑らかになれない局所線型作用は構成できるであろうか？

本講演では、これらがともに Yes であることを説明したい。即ち、ある場合には involution の下での Bauer-Furuta 不変量の消滅定理が成立すること、そして、その応用として、ホモトピー $K3\#K3$ 上に滑らかになれない局所線型 $\mathbb{Z}_2$ 作用が存在することをお話したいと思う。(文献は [17] である。)

まず応用について述べよう。

定理 1.2. $X = K3\#K3$ 上の局所線型 $\mathbb{Z}_2$ 作用で、X の任意の微分構造に対して滑らかになれないものが存在する。

定理 1.2 の証明は上記の楕円曲面の場合と平行である。即ち、滑らかな作用に対する拘束条件を得るのに、後述の Bauer-Furuta 不変量の消滅定理とともに古田幹雄氏、亀谷幸生氏、南範彦氏によるホモトピー $K3\#K3$ に対する非消滅定理 [10] を用いる。

また、局所線型作用の構成には前述の Edmonds-Ewing の実現定理を用いるが、位数 2 の場合には定理 1.1 におけるような奇素数位数の場合より精密な考察が必要となった。すると、今度は、この考察の精密化の副産物として $K3$ の involution に対しても次が得られた。

定理 1.3. $X = K3$ 曲面上の局所線型 $\mathbb{Z}_2$ 作用で、次の性質を満たすものが存在する。

(1) 固定点が孤立している。
(2) $H^+(X;\mathbb{R})$ へ自明に作用する。
(3) X の任意の微分構造に対して滑らかになれない。

尚、ホモトピー $K3$ 上の滑らかな involution は、固定点が孤立しているなら $H^+(X;\mathbb{R})$ へ自明に作用することが J. Bryan [5] により示されている。

さて、involution の下での Bauer-Furuta 不変量の消滅定理を述べよう。X を向き付けられた滑らかな閉 4 次元多様体とし、$\mathbb{Z}_2$ が向きを保って作用しているとする。$\mathbb{Z}_2$ 作用で不変な Riemann 計量を一つ固定すると接枠束に $\mathbb{Z}_2$ 作用が持ち上がるが、この接枠束への作用が、さらにある Spin^c 構造 c に持ち上がっていると仮定する。Spin^c 構造 c の determinant line bundle に $\mathbb{Z}_2$ 作用で不変な接続 A_0 を固定すると、対応する Dirac 作用素は $\mathbb{Z}_2$ 同変であり、その同変指数 $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2} D_{A_0}$ は $\mathbb{Z}_2$ の表現環 $R(\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}[t]/(t^2-1)$ に値を持ち、$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2} D_{A_0} = k_+\mathbb{C}_+ + k_-\mathbb{C}_-$ と書ける。但し、$\mathbb{C}_+$ は $\mathbb{Z}_2$ の自明な複素 1 次元表現を、$\mathbb{C}_-$ は ± 1 の掛け算による複素 1 次元表現を表す。

以下、任意の群 G と任意の G 空間 V に対して、V^G を G 作用の固定点集合とする。また $b_+^G = \dim H^+(X;\mathbb{R})^G$ とする。

定理 1.4. 次の条件が満たされると仮定する。

(1) $b_1 = 0,\ b_+ \geq 2,\ b_+^{\mathbb{Z}_2} \geq 1.$
(2) $b_+ - b_+^{\mathbb{Z}_2}$ は奇数.
(3) $d(c) = 2(k_+ + k_-) - (1 + b_+) = 1.$
(4) $2k_\pm < 1 + b_+^{\mathbb{Z}_2}.$

このとき c の *Bauer-Furuta* 不変量は 0 である。

Remark 1.5. $d(c)$ は Spin^c 構造 c に対する Seiberg-Witten モジュライの仮想次元である。これは、指数定理により、 c の determinant line bundle L と X の位相的データで次のように書ける。

$$d(c) = \frac{1}{4}(c_1(L)^2 - \mathrm{Sign}(X)) - (1 + b_+).$$

Remark 1.6. $d(c) = 1$ で $k_+ + k_-$ が偶数のとき Bauer-Furuta 不変量は $\mathbb{Z}_2$ に値をもち、$d(c) = 1$ で $k_+ + k_-$ が奇数のとき Bauer-Furuta 不変量は常に 0 である。また、$d(c) = 1$ のとき、通常の SW 不変量は定義により 0 であることに注意しよう。

2. $K3\#K3$ 上の non-smoothable な作用の構成

この節では、$K3\#K3$ 上の滑らかになれない局所線型 $\mathbb{Z}_2$ 作用の構成 (定理 1.2) を述べる。以下、断わりの無い限り、多様体は全て向き付けられており、群作用は向きを保つものと仮定する。

まず局所線型作用の定義を思い出しておこう。

定義 2.1. 位相多様体 X への有限群 G の位相的な作用が局所線型であるとは、各点 $x \in X$ に対し、x の固定部分群を G_x としたときに、x の G_x 不変な近傍 U_x が取れ、U_x は G_x のある実線型表現と同変に同相になっていることを言う。

Remark 2.2. 微分多様体への滑らかな作用は局所線型である。なぜならば、滑らかな作用は自然に接束へと持ち上がるので、各軌道に対して同変な近傍が取れるという G チューブ定理から局所線型であることがわかる。

2(i). **$K3\#K3$ 上の滑らかな $\mathbb{Z}_2$ 作用に対する制約.** Dirac 作用素の同変指数は同変指数定理によって固定点の情報で書くことができる。したがって、定理 1.4 を用いると、Bauer-Furuta 不変量と固定点に関する情報との関係をつけることができる。

X を $\mathbb{Z}_2$ が滑らかに作用する単連結な滑らかな 4 次元多様体とする。Atiyah-Bott[1] によると、このときさらに固定点が孤立しているなら、作用はスピン構造に持ち上がることが知られている。したがって、スピン構造から決まる Spin^c 構造 c_0 にも $\mathbb{Z}_2$ 作用が持ち上がる。すると、G スピン定理 [1] により、次の公式が成り立つ:

$$\operatorname{ind}_g D = k_+ - k_- = \frac{1}{4}\sum_{p \in X^{\mathbb{Z}_2}} \varepsilon(p),$$
$$\operatorname{ind} D = k_+ + k_- = -\frac{1}{8}\operatorname{Sign}(X).$$

ここで、$\varepsilon\colon X^{\mathbb{Z}_2} \to \{\pm 1\}$ は、$\mathbb{Z}_2$ 作用の c_0 への持ち上げの様子から決まる各固定点への符号の割り振りである。(このように、同変指数が奇数位数のときのように固定点データのみからは決まらず、作用のよりグローバルな様子を見なければいけないところが、偶数位数のときの少し厄介な点である。) これを解くと、次が得られる：

$$2k_\pm = -\frac{1}{8}\operatorname{Sign}(X) \pm \frac{1}{4}\sum_{p \in X^{\mathbb{Z}_2}} \varepsilon(p).$$

ここで、$k_\pm$ は整数であり、$\frac{1}{8}\operatorname{Sign}(X)$ は偶数なので、$\sum \varepsilon(p)$ は 8 の倍数になることに注意しよう。

さて、もし c_0 の Bauer-Furuta 不変量が 0 でなければ定理 1.4 から滑らかな作用に対して ε に対する制約が得られる。一方、Furuta-Kametani-Minami[10] は $K3\#K3$ と同じ有理係数のコホモロジー環を持つスピン多様体では、全てのスピン構造に対して Bauer-Furuta 不変量が 0 でないことを示している。したがって、次を示すことができる。

命題 2.3. X を $K3\#K3$ と同じコホモロジー環を持つ単連結で滑らかなスピン多様体とし、$\mathbb{Z}_2$ が滑らかに作用しているとする。もし $b_+^{\mathbb{Z}_2} = 5$ で、固定点が孤立しているならば、

$$\left|\sum_p \varepsilon(p)\right| \geq 8. \tag{2.4}$$

Proof. $d(c_0) = 1$ は容易にわかる。もし $\sum \varepsilon(p) = 0$ なら $2k_\pm < 1 + b_+^{\mathbb{Z}_2}$ であるので、定理 1.4 より Bauer-Furuta 不変量が 0 であることが結論され矛盾である。 □

2(ii). $\varepsilon(p)$ **についての Atiyah-Bott の判定法.** 先に進む前に、Atiyah-Bott[1] による $\varepsilon(p)$ の計算法を復習しよう。$\iota\colon X \to X$ を、$\mathbb{Z}_2$ 作用を生成する involuion としよう。ι 不変な計量を固定すると ι は自然に接枠束 F に持ち上がる, $\iota_*\colon F \to F$. 一方、スピン構造は F の二重被覆 $\varphi\colon \hat{F} \to F$ として与えられるのであった。ここで $\hat{F}$ はある $\mathrm{Spin}^c(4)$ 束である。

さて、P, Q を異なる固定点とし、$\varepsilon(P)$ と $\varepsilon(Q)$ を比較したい。このために、接枠束 F の中で、P 上のファイバー F_P の点 y と、Q 上のファイバー F_Q の点 y' とを結ぶ道 s をとる。するとこのとき、$-\iota_* s$ は s と同じ端点を持つ。ここで"$-$" はファイバーごとに -1 倍することを意味する。s と $-\iota_* s$ を結べば F 内に円周 C ができる。このとき Atiyah-Bott の判定法は次である。

命題 2.5 ([1])**.** $\varphi^{-1}(C)$ が二つの連結成分からなることと $\varepsilon(P) = \varepsilon(Q)$ は同値である。いいかえると、$\varphi^{-1}(C)$ が連結であることと $\varepsilon(P) = -\varepsilon(Q)$ は同値である。

2(iii). **Edmonds-Ewing による局所線型作用の構成.** 前述のように局所線型 $\mathbb{Z}_2$ 作用の構成に Edmonds-Ewing による実現定理 [6] を用いる。我々の目的のためにこの実現定理の非常に特別な場合を述べる。

定理 2.6 ([6])**.** $\Psi\colon V \times V \to \mathbb{Z}$ を、*even* な $\mathbb{Z}_2$ 不変ユニモジュラー対称二次形式で、以下を満たすと仮定する。

1. $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$ 加群として V は、ランクが n の自明な $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$ 加群 T と自由な $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$ 加群 F の直和 $T \oplus F$ に同型である。
2. 任意の $v \in V$ に対して、$\Psi(v, gv)$ は偶数である。ここで、g は $\mathbb{Z}_2$ の生成元を表す。
3. G 符号定理が成り立つ。すなわち $\mathrm{Sign}(g, (V, \Psi)) = 0$.

このとき Ψ を交点形式として持つような $\mathbb{Z}_2$ 作用付き単連結 4 次元閉多様体 X が存在して、固定点の数は $n + 2$ 個である。

Remark 2.7. 定理 2.6 において Ψ は even であることを仮定しているので、Freedman の定理により X の homeotype は一意である。

我々の目的のためには、Edmonds-Ewing の作用の構成法も思い出す必要がある。彼らの構成をひとことで言うなら「同変なハンドルによる構成」である。すなわち、作用付きの 0 ハンドルをまず用意し、2 ハンドルを与えられたユニモジュラー形式を実現するように同変に貼っていき、最後にある作用付きの可縮な多様体で蓋をするというものである。少し詳しく見て行こう。

$\mathbb{C}^2$ に $\mathbb{Z}_2$ を ± 1 の掛け算で作用させ、B_0 をその $\mathbb{C}^2$ 内の単位球体としよう。そして、K を $S_0 = \partial B_0$ の中の $\mathbb{Z}_2$ 不変な結び目とする。すると、K の framing はある同変な埋め込み $S^1 \times D^2 \to S_0$ で表される。まず 0-framing は、$f_0\colon S^1 \times D^2 \to S_0$ であって、$f_0(S^1 \times \{0\}) = K$, であり $f_0(S^1 \times \{1\})$ は K との linking number が 0 であり、$S^1 \times D^2 \subset \mathbb{C}^2$ への $\mathbb{Z}_2$ 作用は ± 1 の掛け算で与えられるものである。一般の r-framing は $f_r\colon S^1 \times D^2 \to S_0$ は $f_r(z, w) = f_0(z, z^r w)$ で与えられるが、このときの $S^1 \times D^2$ への $\mathbb{Z}_2$ 作用は $g(z, w) = (-z, (-1)^{r-1} w)$ である。

結び目 K と framing r が与えられたときに、$D^2 \times D^2$ への $\mathbb{Z}_2$ 作用を適当に決めてやることで、$\mathbb{Z}_2$ 作用付き多様体 $W = B_0 \cup_{f_r} D^2 \times D^2$ を作ることができる。

さて、$H_1, \ldots, H_n$ を $D^2 \times D^2$ のコピーで $\mathbb{Z}_2$ が ± 1 の掛け算で作用するものとする。もし framing r が偶数なら、各 H_i を f_r を用いて同変に B_0 に貼ることができる。

Edmonds-Ewing の構成は三つのステップからなる。

ステップ 1. 与えられたユニモジュラー形式 Ψ を S_0 の中の framed link L で表す。定理 2.6 の仮定のもとで、Ψ の $\mathbb{Z}_2$ 不変部分 T への制限 $\Psi|_T$ は基底の取り換えによって対角成分が偶数でそれ以外が奇数である行列 (a_{ij}) で表されることが示されている。また、S_0 内の二つの $\mathbb{Z}_2$ 不変な結び目 K, K' の linking number は常に奇数であることも示されている。すると任意の n 成分のリンクから出発して、同変に成分間の crossing を変えてやることで $\Psi|_T$ を framed link L_T で表すことができる。そこまでくれば、Ψ の他の部分をリンクで表すのは容易である。

ステップ 2. ハンドル $H_1, \ldots, H_n$ と自由な 2 ハンドルをリンク L に沿って同変に B_0 に貼っていくことで滑らかな $\mathbb{Z}_2$ 作用付き 4 次元多様体 X_0 が構成される:

$$X_0 = B_0 \cup H_1 \cup \cdots \cup H_n \cup \text{ (自由なハンドルたち)}.$$

ステップ 3. X_0 の境界は $\mathbb{Z}_2$ が自由に作用する $\mathbb{Z}$ ホモロジー 3 球面 Σ である。定理 2.6 の仮定のもと、局所線型 $\mathbb{Z}_2$ 作用付きの可縮な 4 次元多様体 Z で、固定点が丁度一点で作用も込みで Σ を境界に持つものが存在することが示されている。すると $X = X_0 \cup Z$ が求めるものである。

上のような構成で得られた作用は最後の固定点の周りを除いて滑らかである、即ち、X_0 の上では滑らかである。X_0 上で符号の分布 ε を決定しよう。B_0 そして各 $H_1, \cdots, H_n$ は、それぞれ丁度一つずつ固定点を持っていた。そこで、各 H_i の固定点と B_0 の固定点で ε の値を比較する。各 i について $W = B_0 \cup H_i$ 上で考えればよい。W はある結び目 K と framing に対して $W = B_0 \cup_{f_r} D^2 \times D^2$ として与えられるものであった。P を B_0 の固定点とし、Q を $D^2 \times D^2$ の固定点とする。

このとき次を示すことができる。

命題 2.8. K が自明な結び目だったとする。もし $r \equiv 2 \ mod\ 4$ なら $\varepsilon(P) = \varepsilon(Q)$. もし $r \equiv 0 \ mod\ 4$ なら $\varepsilon(P) = -\varepsilon(Q)$.

したがって、もし $\Psi|_T$ を表す framed link L_T の各成分が自明な結び目ならば、X_0 上の符号の分布 ε は貼り合わせの行列 (a_{ij}) の対角成分の mod 4 で決まる。

2(iv). **$K3\#K3$ 上の滑らかになれない局所線型 $\mathbb{Z}_2$ 作用.** $X = K3\#K3$ 上に滑らかになれない局所線型 $\mathbb{Z}_2$ 作用を構成しよう。まず X の交点形式は、H を hyperbolic form としたときに $4E_8 \oplus 6H$ と同型であることに注意する。定理 2.6 により、$4E_8 \oplus 6H$ に適当な $\mathbb{Z}_2$ 作用を構成すれば X 上の局所線型作用が得られる。

$\Psi = 4E_8 \oplus 6H$ へ $\mathbb{Z}_2$ を以下のように作用させる。まず hyperbolic な部分 $6H$ のうち、ある $2H$ に二つの H の入れ換えで作用させる。同様に $2E_8 \oplus 2E_8$ も二つの $2E_8$ の入れ換えとして作用させる。残りの $4H$ へは自明に作用させる。この自明な $4H$ を T と書こう。

ここで次の行列を考える：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

すると A で表される対称形式は、even、不定値、ユニモジュラーであることがわかるので、$4H$ と同型であることがわかる。したがって、$\Psi|_T$ は行列 A で表されると見做して良い。さらに、A は以下のように、各成分が自明な結び目であるようなリンクで表すことができる。$p\colon S^3 \to S^2$ を Hopf fibration とする。S^2 上に相異なる 8 点を取り、p による逆像を考えるとそれが求めるリンクである。

すると §2(iii) の同変なハンドルによる構成により、X_0 上で滑らかで、X 全体には局所線型に延びる $\mathbb{Z}_2$ 作用が構成される。

もし X_0 上の滑らかな作用が X 全体に滑らかに延びたとすると、命題 2.3 によって、$|\sum \varepsilon(p)| \geq 8$ である。しかし、命題 2.8 によると、A から作られた作用が $|\sum \varepsilon(p)| \geq 8$ を満たすのは不可能である。それゆえ X_0 上の作用は X 全体に滑らかには延びない。

ここで、我々はさらに強く、今構成した作用が **non-smoothable** であることを主張したい。

その前に non-smoothable であるとはどういう意味であるかをはっきりさせておこう。X を向き付けられた位相多様体とし、G を有限群としよう。もし X に微分構造が入り、ある微分構造 σ を固定したなら、その微分多様体を X_σ と書くことにする。X への G 作用に関する次の二つの集合を考えよう。

$$LL(G,X) = \{X \text{ 上の局所線型 } G \text{ 作用の homeo による共役類全体}\}$$
$$C^\infty(G,X_\sigma) = \{X_\sigma \text{ 上の滑らかな } G \text{ 作用の diffeo による共役類全体}\}.$$

すると、微分構造を忘れる写像 $\Phi_\sigma\colon C^\infty(G,X_\sigma) \to LL(G,X)$ がある。

定義 2.10. 局所線型作用が微分構造 σ に関して non-smoothable であるとは、そのクラスが Φ_σ の像に含まれないことである。

さて、X_σ が滑らかな 4 次元多様体で $G = \mathbb{Z}_2$ のときに話しを戻そう。スピン構造は接束を用いて構成されるため、その定義に微分構造を implicit に使っている。したがってスピン構造への作用の持ち上げに関する符号の分布 ε も微分構造によるかもしれない。

しかしながら、この符号の分布 ε の定義は位相多様体上の局所線型な作用に拡張することができ、微分構造によらないことがわかる。詳細は省略するが、概ね以下のようである。

n 次元位相多様体 M に対して、接マイクロバンドル τM が定義される。するとこの接マイクロバンドルを用いて、位相的なスピン構造を考えることが可能である。より詳しく言うなら、Kister-Mazur の定理 [13] によって、τM は、$\mathbb{R}^n$ の原点と向きを保つ同相写像全体のなす位相群 $\mathrm{STop}(n)$ を構造群とする $\mathbb{R}^n$ 束 $\tau' M$ と同一視される。一方、[12] や [8] にある TOP/DIFF のホモトピー群に関する深い結果を用いると、$n \geq 2$ のときに inclusion $\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{STop}(n)$ が π_0, π_1, π_2 の同型を誘導することがわかる。あとは接枠束からスピン構造を定義するやり方を真似れば良い。

符号の分布は、Atiyah-Bott の判定法 (命題 2.5) のやり方で定義してしまえば良い。すなわち、接マイクロバンドルの枠束 F を考え、二つの固定点 P, Q 上の F のファイバー上の点を結ぶパスをとり、それを作用 $-\iota_*$ で写したパスと結んだ円周を考え、位相的スピン構造への引き戻しが連結かどうかで符号を判定すればよい。するとこれは局所線型作用に対して定義され、微分構造によらず、滑らかなときには以前の定義と一致することがわかる。

結論として、われわれの構成した作用が non-smoothable であることがわかり、定理 1.2 が示される。また、$K3$ の場合 (定理 1.3) の証明も、同様のやりかたでなされる。

3. Bauer-Furuta 不変量の消滅定理の証明

この節では Bauer-Furuta 不変量の消滅定理 (定理 1.4) の証明を説明する。証明は [3] における Bauer の議論に触発されたものである。スピン構造上のモノポール写像は Pin(2) 同変になるが、これを調べるのに Bauer は Bredon コホモロジー上の同変な障害理論を用いている。実際、Bauer-Furuta 不変量は、ある同変安定コホモトピー群の元として定義されるが、Bauer は Pin(2) 同変なコホモトピー群から S^1 同変なコホモトピー群への $\mathbb{Z}_2$ 作用を忘れる写像が 2 倍写像であることを示している。このことから、ある場合には SW 不変量が 2 の倍数であることがしたがう。

もし Spin^c 構造に $\mathbb{Z}_2$ が作用している場合には、モノポール写像には Pin(2) の代わりに $\mathbb{Z}_2 \times S^1$ が作用する。この状況で Bredon コホモロジーを具体的に計算し、Bauer の議論を踏襲することで我々の消滅定理は示される。

3(i). **Bauer-Furuta 不変量.** ここでは Bauer-Furuta 不変量について説明する。群作用のある状況では、自然にその同変版が定義され、もともとの不変量はその特別な場合になっているので、はじめから同変版について述べることにする。

以下、$\mathbb{Z}_2$ 作用付き 4 次元多様体 X は定理 1.4 の仮定を満たしているとする。$S^+(S^-)$ を Spin^c 構造 c の正 (負) スピノル束とし、L を determinant line bundle とする。

$\mathcal{C}, \mathcal{U}$ を、つぎのような空間とする。

$$\mathcal{C} = \Omega^1(X) \oplus \Gamma(S^+),$$
$$\mathcal{U} = \Gamma(S^-) \oplus i\Omega^+(X) \oplus \Omega^0(X)/\mathbb{R}.$$

ここで、$\mathbb{R}$ は定値写像のなす空間を表す。(正確にはこれらの空間の適当なソボレフ・ノルムでの完備化をとらなければならないが、解析の詳細は省略する。)

序にあるように L に $\mathbb{Z}_2$ 不変な接続 A_0 を一つ固定する。**モノポール写像** $\mu\colon \mathcal{C} \to \mathcal{U}$ を次で定義する:

$$\mu(a, \phi) = (D_{A_0+ia}\phi, F^+_{A_0+ia} - q(\phi), d^*a).$$

ここで、$q(\phi)$ は、S^+ の自己準同型 $\phi \otimes \phi^*$ の trace free part をクリフォード積を通じて複素 2 形式と同一視したものである。Spin^c 構造 c に $\mathbb{Z}_2$ が作用している我々の状況では μ は $\mathbb{Z}_2 \times S^1$ 同変となる。

モノポール写像 μ に古田幹雄氏 [9] によって導入された有限次元近似の方法を用いると、十分大きな $\mathcal{C}, \mathcal{U}$ の部分空間 V, W に対して、これらの一点コンパクト化の間の写像 $f\colon S^V \to S^W$ が定義される。(正確には V と f は W を取ることに応じて定まるものである。) すると f は suspension に関して良い性質をもっており、これを用いて**同変 Bauer-Furuta 不変量** $\mathrm{FB}^{\mathbb{Z}_2}(c)$ が次の同変安定コホモトピー群の要素として定義される [4]:

$$\mathrm{FB}^{\mathbb{Z}_2}(c) = [f] \in \{\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2} D, H^+\}^{\mathbb{Z}_2 \times S^1} = \operatorname*{colim}_{U \subset \mathcal{U}} [S^U \wedge S^{V-W}, S^U \wedge S^0]^{\mathbb{Z}_2 \times S^1}.$$

ここで S^{V-W} は S^V の W による desuspension を表すが、それは S^W から S^V への写像のなす空間とみなすことができる。

$\mathbb{Z}_2$ 作用が無い状況で考えると、もともとの Bauer-Furuta 不変量 $\mathrm{FB}(c)$ が $\{\mathrm{ind}\, D, H^+\}^{S^1}$ の元として定義される。同変な不変量との関係は、$\phi\colon \{\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2} D, H^+\}^{\mathbb{Z}_2 \times S^1} \to \{\mathrm{ind}\, D, H^+\}^{S^1}$ を $\mathbb{Z}_2$ 作用を忘れる写像としたときに、$\mathrm{FB}(c) = \phi(\mathrm{FB}^{\mathbb{Z}_2}(c))$ である。

一般にこのようなコホモトピー群の計算は容易でないが、S^1 のときの幾つかの場合については [4] で計算されている。$d(c)=1$ のときには、

$$\{\operatorname{ind} D, H^+\}^{S^1} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \operatorname{ind} D = k_+ + k_- \text{ が偶数}, \\ \{0\}, & \operatorname{ind} D = k_+ + k_- \text{ が奇数}. \end{cases} \tag{3.1}$$

3(ii). **障害類としての Bauer-Furuta 不変量.** さらに $\operatorname{ind} D > 0$ のときには $\{S^V, S^W\}^{S^1} \cong \{S^V/S^1, S^W\}$ が示されている。すると Freudenthal の懸垂定理によって、十分大きな V, W に対して $\{S^V/S^1, S^W\}$ は通常のコホモトピー群 $[S^V/S^1, S^W]$ で実現されることがわかる。すると、$[S^V/S^1, S^W]$ は通常の障害理論で調べることができる。

一方、S^V/S^1 は $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ の何回かの懸垂と同じホモトピー型をしていることがすぐにわかるので、次が言える。

命題 3.2. $d(c)=1$ とし、$n = \dim S^V/S^1$ と置く。(このとき $\dim S^W = n-1$ である。) すると、$r \neq n$ のとき $H^r(S^V/S^1, *; \pi_r(S^W)) = 0$ であり、また $H^n(S^V/S^1, *; \pi_n(S^W)) \cong \mathbb{Z}/2$ である。

したがって、標準的な障害理論を用いれば次がわかる。

定理 3.3 ([11], Chapter VI 参照)**.** $H^n(S^V/S^1, *; \pi_n(S^W))$ の部分群 J が存在して、

$$[S^V/S^1, S^W] \cong H^n(S^V/S^1, *; \pi_n(S^W))/J.$$

同型は $f \in [S^V/S^1, S^W]$ に差の障害類 $d(f, \underline{0})$ を対応させることで得られる。ここで $\underline{0}$ は S^V 全体を基点につぶす写像である。

このようにして Bauer-Furuta 不変量を障害類の言葉で書くことができる。すなわち $f\colon S^V \to S^W$ がモノポール写像の有限次元近似のときに $\mathrm{FB}(c) = d(f, \underline{0})$ である。

3(iii). **同変障害理論と同変 Bauer-Furuta 不変量.** 直前の小節では $\mathbb{Z}_2$ 作用を考えない場合の議論をしたが、$\mathbb{Z}_2$ 作用があるときも、ある場合には、同変な障害理論を用いることによって、同変 Bauer-Furuta 不変量を Bredon コホモロジーの要素として定まる同変障害類と見做すことができる。

Bredon コホモロジーは、G-CW 複体に対して定義される同変コホモロジー理論の一種である。以下、Bredon コホモロジーと同変障害理論について粗く説明するが、詳細については [17] とその中にある文献を見られたい。

まず G-CW 複体を思い出す。とりあえずここでは G をコンパクト Lie 群とする。

定義 3.4. G-CW complex K は、以下を満たす G 空間 K^n たちの和である:

- K^0 は軌道 G/H たちの disjoint union である。
- K^n は K^{n-1} に n 胞体 $\sigma \cong G/H_\sigma \times D^n$ を貼り合わせの G 写像 $a_\sigma\colon G/H_\sigma \times S^{n-1} \to K^{n-1}$ で貼ってえられる。
- K の位相は (K^n) についての colimit topology である。

さらにいくつかのものを用意する。

定義 3.5. G の canonical orbit のカテゴリー $\mathcal{O}_G$ は、対象が G/H (但し H は G の閉部分群)、射が G 写像 $G/H \to G/I$ の G ホモトピー類であるカテゴリーである。

Bredon コホモロジーの係数にあたるものは次で与えられる。*Abel* をアーベル群のなすカテゴリーとする。

定義 3.6. 反変関手 $\mathcal{O}_G \to Abel$ を (G) **係数系**と呼ぶ.

Bredon コホモロジーの定義を粗く述べる。K を G-CW 複体とし、$M\colon \mathcal{O}_G \to Abel$ を係数系とする。このときコチェイングループ $C^n_G(K,M)$ は各 n 胞体 σ に対してアーベル群 $M(G/H_\sigma)$ の元を対応させる関数全体である。(一般に胞体ごとに行き先の群が異なることに注意。)

そして、コバウンダリー写像は粗く言うと、大体次で与えられるようなものである。$(n+1)$ 胞体 τ と n コチェイン $\varphi \in C^n_G(K,M)$ に対し、

$$(\delta\varphi)(\tau) = \sum_{\sigma\colon n \text{ 胞体}} [\tau : \sigma] M(G/H_\tau \to G/H_\sigma)\varphi(\sigma) \in M(G/H_\tau).$$

ここで $[\tau : \sigma]$ は、しかるべく定義された結合係数である。

さて、同変な障害理論のために次のような係数系を考える。

定義 3.7. 整数 $n \geq 1$ を固定する。Y を G 空間であって、G に各閉部分群 H に対して Y^H は空でない、弧状連結で n 単純な空間だとする。このとき係数系 $\underline{\pi}_n(Y)$ を、$\underline{\pi}_n(Y)(G/H) = \pi_n(Y^H)$ で定義する。

すると、G 写像 $f\colon K^n \to Y$ が与えられたときに、それがいつ同変に $(n+1)$-skelton に延びるかや、二つの G 写像がいつ G ホモトピックになるか等を、$\underline{\pi}_n(Y)$ を係数とする Bredon コホモロジーの言葉で書くことができる。

われわれに必要な場合をまとめると次のようになる。

定理 3.8. $n = \dim S^V/S^1$ と置く。もし、$r \neq n$ のとき $H^r_{\mathbb{Z}_2\times S^1}(S^V, *; \underline{\pi}_r(S^W)) = 0$ ならば、$H^n_{\mathbb{Z}_2\times S^1}(S^V, *; \underline{\pi}_n(S^W))$ の部分群 J' が存在して、

$$\{S^V, S^W\}^{\mathbb{Z}_2\times S^1} \cong H^n_{\mathbb{Z}_2\times S^1}(S^V, *; \underline{\pi}_n(S^W))/J'.$$

3(iv). **Bauer-Furuta 不変量の消滅定理の証明.** 定理 3.8 により、もしトップ以外の階数の Bredon コホモロジーが消えていれば、同変 Bauer-Furuta 不変量が同変な障害理論の言葉で書ける。実は、定理 1.4 の仮定の下ではそれが成立している。

まず次が言える。

補題 3.9. もし $2k_\pm < 1 + b_+^{\mathbb{Z}_2}$ なら、$k \leq n-2$ のとき $C^k_{\mathbb{Z}_2\times S^1}(S^V, *; \underline{\pi}_k(S^W)) = 0$.

これは、各胞体 σ ごとに、次元の関係から $\underline{\pi}_k(S^W)(G/H_\sigma) = \pi_k((S^W)^{H_\sigma}) = 0$ が言えることで示される。

次が一つのキーとなる命題である。

補題 3.10. もし $b_+ - b_+^{\mathbb{Z}_2}$ が奇数なら、$H^{n-1}_{\mathbb{Z}_2\times S^1}(S^V, *; \underline{\pi}_{n-1}(S^W)) = 0$.

Remark 3.11. もし $b_+ - b_+^{\mathbb{Z}_2}$ が偶数なら、$H^{n-1}_{\mathbb{Z}_2\times S^1}(S^V, *; \underline{\pi}_{n-1}(S^W)) \cong \mathbb{Z}_2$.

補題 3.10 は、S^V の群作用から定まる G-CW 複体の構造をきちんと見ることでわかる。

以上のことから、定理 1.4 の仮定のもとで、同変 Bauer-Furuta 不変量 $\mathrm{FB}^{\mathbb{Z}_2}(c)$ は最高次の Bredon コホモロジー $H^n_{\mathbb{Z}_2\times S^1}(S^V, *; \underline{\pi}_n(S^W))$ の要素で書くことができる。

次に、トップの階数において常コホモロジーと Bredon コホモロジーの比較をする。実は、$\mathbb{Z}_2$ 作用を忘れる自然な写像 $\bar{\phi}\colon H^n_{\mathbb{Z}_2\times S^1}(S^V,*;\underline{\pi}_n(S^W)) \to H^n(S^V/S^1,*;\pi_n(S^W)) \cong \mathbb{Z}/2$ があり、これが 2 倍写像であることがわかる。これは、都合の良い十分大きな V, W をとると、S^V の高い次数の胞体が自由な G 胞体である、すなわち $G/\{e\}\times D^k$ の形をしており $\mathbb{Z}_2$ が自由に作用することから得られる。したがって $\bar{\phi}$ は 0 写像である。

ここで次の可換図式を考えよう:

$$\begin{array}{ccc}
H^n(S^V/S^1,*;\pi_n(S^W)) & \longrightarrow & H^n(S^V/S^1,*;\pi_n(S^W))/J \cong \{S^V,S^W\}^{S^1} \\
{\scriptstyle\bar{\phi}}\Big\uparrow & & {\scriptstyle\phi}\Big\uparrow \\
H^n_{\mathbb{Z}_2\times S^1}(S^V,*;\underline{\pi}_n(S^W)) & \longrightarrow & H^n_{\mathbb{Z}_2\times S^1}(S^V,*;\underline{\pi}_n(S^W))/J' \cong \{S^V,S^W\}^{\mathbb{Z}_2\times S^1}.
\end{array}$$

さて、$\mathrm{FB}(c)=\phi(\mathrm{FB}^{\mathbb{Z}_2}(c))$ であり、 $\bar{\phi}$ は 0 写像であった。したがって、$\mathrm{FB}(c)=0$ が得られる。かくして定理 1.4 は示された。

3(v). **いくつかの注意.** 最後にいくつか注意を述べておきたい。

Remark 3.12. $d(c)=0$ で $b_1=0$ の場合に限れば、SW 不変量の mod p 消滅定理 [7, 16] をこの節の方法で示すことも可能である。

Remark 3.13. $d(c)=1$ とし、involution の代わりに奇素数位数の $\mathbb{Z}_p$ 作用が与えられたとしよう。このとき、この節の議論のある部分はうまく働くがある部分はそうでない。例えば、しかるべき条件の下で低い次元の Bredon コホモロジー群が 0 になることは示せる。しかし、たとえ $(n-1)$ 次までのコホモロジーが消えていても、忘却写像は 0 写像にはならないので、$\mathbb{Z}_p$ 作用下でこのような消滅定理が言えることは期待できない。

Remark 3.14. $d(c)\geq 2$ のときにこのような消滅定理を示すのも簡単ではないかもしれない。なぜなら、常コホモロジーにおいても $(n-2)$ 次が既に消えていないからである。

References

[1] M. F. Atiyah and R. Bott, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes II Applications*, Ann. Math. **88** (1968), 451–491.

[2] S. Bauer, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. II*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 21–40.

[3] S. Bauer, *Almost complex 4-manifolds with vanishing first Chern class*, preprint, math.GT/0607714.

[4] S. Bauer and M. Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants: I*, Invent. Math. **155** (2004), 1–19.

[5] J. Bryan, *Seiberg-Witten theory and $\mathbb{Z}/2^p$ actions on spin 4-manifolds*, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 1-2, 165–183.

[6] A. L. Edmonds and J. H. Ewing, *Realizing forms and fixed point data in dimension four*, Amer. J. Math. **114** (1992), 1103–1126.

[7] F. Fang, *Smooth group actions on 4-manifolds and Seiberg-Witten invariants*, International J. Math. **9**, No.8 (1998) 957–973.

[8] M. H. Freedman and F. Quinn, Topology of 4-manifolds, Princeton Mathematical Series, 39. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[9] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291.

[10] M. Furuta, Y. Kametani, N. Minami, *Stable-homotopy Seiberg-Witten Invariants for Rational Cohomology $K3\#K3$'s*, Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo **8** (2001), No. 1, 157-176.

[11] S. Hu, Homotopy theory, Pure and Applied Mathematics, Vol. VIII, Academic Press, New York, 1959.

[12] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann, Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations. Annals of Mathematics Studies, No. 88. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1977.

[13] J. M. Kister, *Microbundles are fibre bundles.* Ann. of Math. (2) **80** (1964) 190–199.

[14] X. Liu and N. Nakamura, *Pseudofree $\mathbb{Z}/3$-actions on $K3$ surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), no. 3, 903–910.

[15] X. Liu and N. Nakamura, *Unsmoothable group actions on elliptic surfaces*, preprint.

[16] N. Nakamura, *Mod p vanishing theorem of Seiberg-Witten invariants for 4-manifolds with $\mathbb{Z}_p$-actions*, Asian J. Math. **9**, (2006), no.4, 731–748.

[17] N. Nakamura, *Bauer-Furuta invariants under $\mathbb{Z}_2$-actions*, preprint, math.GT/0705.1595.

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1, Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan

E-mail address: nobuhiro@ms.u-tokyo.ac.jp